

ALGEBRAÏSCHE STRUCTUREN

(27/06/2009 (13u-17u))

THEORIE

- [1] (a) Geef de Stelling van Lagrange. Je hoeft dit niet te bewijzen.
(b) Zij $G, *$ een eindige groep en x een element van G . Bewijs dat de orde van x een deler is van de orde van G .

Bijvraagjes:

- Wat is het invers van $x^2 \in \langle x \rangle$?
- Bestaat er een oneindige groep waarin er een element is met orde 2?
- Bestaat er een oneindige groep waarin elk element orde 2 heeft?

- [2] Zij V een eindige vectorruimte over een veld K met een karakteristiek niet gelijk aan twee. Bewijs dat er een kanoniek isomorfisme bestaat tussen V en $(V^*)^*$.

Bijvraagjes:

- Geldt dit bewijs ook voor oneindigdimensionale vectorruimten? Verklaar je antwoord en leg uit waar het eventueel misloopt.

OEFENINGEN

- [1] Bepaal de rest bij deling van 2008! door 2011 met gegeven dat 2011 priem is.
- [2] Bepaal $55^{62} - 2 \cdot 13^{62} + 41^{62} \bmod 182$.
- [3] Zij $G, *$ een eindige groep en zij $\theta : G \rightarrow G$ een groepsmorphisme waarvoor geldt dat $\theta^2 = \theta \circ \theta = \text{Id}$, maar voor alle $g \in G$ met $g \neq e_G$ geldt dat $\theta(g) \neq g$.
- (a) Toon aan dat het groepsmorphisme $\varphi : G \rightarrow G : g \mapsto \varphi(g) = g^{-1} * \theta(g)$ bijectief is.
- (b) Toon aan dat voor alle $g \in G$ geldt dat $\theta(g) = g^{-1}$.
- [4] Zij $V = K^{2 \times 2}$ een symmetrisch bilineaire ruimte over een veld K met karakteristiek niet 2 met volgende vorm

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V : (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{Spoor}(AB).$$

Hierbij definiëren we het spoor als $\text{Spoor}(M) = M_{11} + M_{22}$ voor alle $M = (M_{ij})_{i,j=1}^2 \in V$.

- (a) Bepaal een basis $\mathcal{V}$ van V zo dat de matrix van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ten opzichte van $\mathcal{V}$ een symmetrische matrix is.
- (b) Kan je voor $K = \mathbb{Z}_{17}$ een basis $\mathcal{W}$ vinden, zo dat de matrix van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ten opzichte van $\mathcal{W}$ de eenheidsmatrix I_4 is?