

PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
donderdag 19 november 2009

Naam:

Voornaam:

Richting + Reeks:

- Schrijf op elk blad je naam.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Enkel het net afgeven.

Veel succes!

1. (a) Zij V een vectorruimte en $v_1, v_2 \in V$. Noteer met U_i , $i \in I$, alle lineaire deelruimten van V die v_1 en v_2 bevatten. Bewijs dat

$$[v_1, v_2] = \bigcap_{i \in I} U_i.$$

- (b) Zij V een eindigdimensionale vectorruimte. Zij $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ en $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ twee basissen van V .
- i. Definieer de matrix van basisverandering P van \mathcal{E} naar \mathcal{F} .
 - ii. Geef en bewijs de formule die het verband geeft tussen de coördinaten van een vector $v \in V$ ten opzichte van \mathcal{E} en \mathcal{F} (in termen van P).

2. Geef een inverteerbare (3×3) -matrix P zodat

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \cdot P$$

een bovendriehoeksmatrix is.

3. (a) Zij V een vectorruimte en $U_1, U_2 \subset V$ lineaire deelruimten. Toon aan: als $U_1 \neq V$ en $U_2 \neq V$, dan is $U_1 \cup U_2 \neq V$.
- (b) Neem nu $V = \mathbb{R}^{2009}$ en veronderstel dat $\dim U_1 = \dim U_2 = 2006$. Toon aan dat er een 3-dimensionale lineaire deelruimte $U \subset V$ bestaat zodat

$$U_1 \cap U = \{0\} \quad \text{en} \quad U_2 \cap U = \{0\}.$$

Je kan hiervoor (a) gebruiken.

4. (a) Is de volgende uitspraak WAAR of VALS? Bewijs of weerleg.
Zij $U_1, U_2 \subset V$ twee lineaire deelruimten van een vectorruimte V en zij respectievelijk W_1 en W_2 een supplementaire deelruimte, zodat dus $U_1 \oplus W_1 = V$ en $U_2 \oplus W_2 = V$. Dan geldt er dat $(U_1 \cap U_2) \oplus (W_1 + W_2) = V$.

- (b) An, Tom en Jean-Alexandre zijn samen op reis in Brunei, een kleine Sultanstaat in Zuidoost-Azië. De munteenheid van Brunei is de Bruneise Dollar (BND), maar gelukkig worden in de meeste winkels ook Euro's (EUR) aanvaard.

In een lokale supermarkt koopt An 1 pot mayonaise, 2 alcoholstiften en 3 sigaren. Ze betaalt hiervoor 29 EUR en 1 BND. Tom koopt 2 potten mayonaise, 2 alcoholstiften en 5 sigaren. Hij betaalt met een briefje van 50 EUR, maar krijgt 2 BND terug. Jean-Alexandre tenslotte koopt 2 alcoholstiften en 1 sigaar. Hij betaalt hiervoor 9 EUR en 2 BND.

Hoeveel Euro is de Bruneise Dollar waard?