

Vraag:	1	2	3	Totaal
Punten:	4	9	7	20
Score:				

Tussentijdse toets Kansrekenen I (G0W66A)

16 mei 2019

Naam :

Richting :

Lees volgende aanwijzingen alvorens aan het examen te beginnen

- Schrijf op het 1ste blad duidelijk je volledige naam en richting (en op elk blad je naam).
- Je mag gebruik maken van niet-grafisch rekenmachine, formularium en statistische tabellen. Op het formularium en de tabellen mag niets geschreven staan! Berekeningen moeten altijd schriftelijk uitgevoerd worden tot het moment dat je de waarde zou kunnen opzoeken in een statistische tabel. Bijvoorbeeld: het uitrekenen van een kans onder een normale verdeling moet herleid worden tot een kans onder een standaardnormale verdeling, een binomiale kans moet herleid worden tot een kans onder een normale verdeling (indien CLS van toepassing is). Wanneer het nodige aantal vrijheidsgraden niet in de tabel staat, mag je gaan kijken bij het dichtstbijzijnde aantal dat wel in de tabel staat. Werk met 4 cijfers na de komma!
- Alle communicatie-apparatuur is strikt verboden.
- Gebruik de voorziene ruimte om te antwoorden op de vragen (voor- en achterkant).
- Bij het indienen, geef je ook kladpapier af (maar daar wordt geen rekening mee gehouden tijdens verbetering).
- Let op
 - correct (numeriek) antwoord zonder uitleg (of foute uitleg) is weinig/niets waard!
 - fout (numeriek) antwoord zonder uitleg is niets waard.
 - fout numeriek antwoord (bvb ten gevolge van een rekenfout) met juiste afleiding is veel waard.

Toon dus **DUIDELIJK** aan hoe je tot ieder numeriek resultaat komt (telegramstijl is toegelaten). Gebruik zoveel mogelijk de wiskundige notatie zoals die in de leerstof is aangebracht. Verklaar nieuwe symbolen.

- Je hebt **1 uur** tijd om de toets op te lossen.

VEEL SUCCES !

1. (4 punten) Beoordeel de volgende uitspraak. Indien de uitspraak **juist** is, verklaar dan kort waarom. Indien de uitspraak **fout** is, leg dan uit wat er fout is en verbeter indien mogelijk:

“ De verzameling $\sigma(\mathcal{C})$ is de σ -algebra voortgebracht door de klasse \mathcal{C} , met

- het universum $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$,
- $\mathcal{C} = \{\{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\delta, \varepsilon\}, \{\gamma, \varepsilon\}\}$ en
- $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{\gamma, \varepsilon\}, \{\delta, \varepsilon\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}, \{\gamma, \delta, \varepsilon\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}, \Omega\}$.”

Oplossing: $\sigma(\mathcal{C})$ is geen σ -algebra want bijvoorbeeld $\{\gamma, \varepsilon\} \cap \{\delta, \varepsilon\} = \{\varepsilon\}$ behoort niet tot $\sigma(\mathcal{C})$.

De verzameling $\sigma(\mathcal{C})$ is de σ -algebra voortgebracht door de klasse \mathcal{C} indien

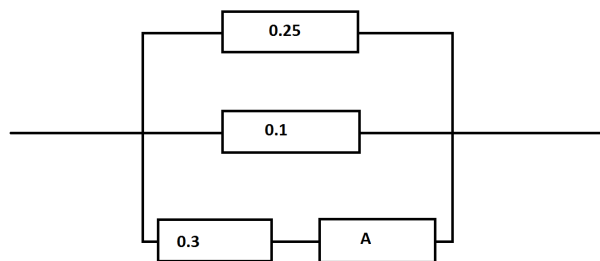
$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup \left\{ \emptyset, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\varepsilon\}, \{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \beta, \varepsilon\}, \{\gamma, \delta, \varepsilon\}, \right. \\ \left. \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}, \{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon\}, \Omega \right\}$$

Ook de volgende correctie van de uitspraak is juist:

$$\mathcal{C} = \left\{ \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\delta, \varepsilon\} \right\}$$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup \left\{ \emptyset, \Omega \right\}$$

2. (9 punten) Beschouw de onderstaande schakeling met onafhankelijke componenten (de waarden duiden de faalkans aan van de individuele componenten).



Figuur 1: Schakeling

- (a) Veronderstel dat de faalkans van component A gelijk is aan x . Wat is dan de faalkans van het systeem in functie van x ?

Oplossing: $P(S) = 0.25 \times 0.1 \times (0.3 + x - 0.3x)$

- (b) Veronderstel nu dat de faalkans van component A onbekend is. Bepaal de kans dat component A faalt als geweten is dat wanneer het systeem faalt, dit in 20% van de gevallen te wijten is aan component A .

Oplossing: Er is gegeven dat $P(A|S) = 0.20$. We bekommen

$$\begin{aligned} 0.20 = P(A|S) &= \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)} \\ &= \frac{0.25 \times 0.1 \times P(A)}{0.25 \times 0.1 \times [0.3 + P(A) - 0.3 \times P(A)]} = \frac{P(A)}{0.3 + 0.7 \times P(A)} \end{aligned}$$

Als we de laatste vergelijking oplossing naar $P(A)$ krijgen we $0.06 + 0.14 \times P(A) = P(A)$. Bijgevolg is

$$P(A) = \frac{0.06}{0.86} = 0.069747 \quad (\text{afgerond})$$

3. (7 punten) De stochastische veranderlijke X heeft de volgende dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{26}(x+2)^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de momentgenererende functie (MGF) van X .

Oplossing: We berekenen de MGF via de definitie m.b.h.v. partiële integratie:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \frac{3}{26} \int_{-1}^1 (x+2)^2 e^{tx} dx \\ &= \frac{3}{26t} [(x+2)^2 e^{tx}]_{-1}^1 - \frac{3}{26t} \int_{-1}^1 2(x+2) e^{tx} dx \\ &= \frac{3}{26t} (9e^t - e^{-t}) - \frac{6}{26t^2} [(x+2)e^{tx}]_{-1}^1 + \frac{6}{26t^2} \int_{-1}^1 e^{tx} dx \\ &= \frac{3}{26t} (9e^t - e^{-t}) - \frac{6}{26t^2} (3e^t - e^{-t}) + \frac{6}{26t^3} (e^t - e^{-t}) \end{aligned}$$

- (b) De Taylorontwikkeling van de MGF van X rond $t = 0$ wordt gegeven door (dit moet je zelf niet narekenen)

$$1 + \frac{4}{13}t + \frac{23}{130}t^2 + \frac{2}{65}t^3 + \dots$$

Gebruik deze om $E[X]$ en $\text{Var}[X]$ te berekenen.

Oplossing:

- $E[X] = M'_X(0) = \frac{4}{13}$
- $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = M''_X(0) - \left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{23}{65} - \frac{16}{169} = \frac{2847}{10985} = \frac{219}{845}$