

Naam:

q-nummer:

Score:

## Proefexamen Thermodynamica, april 2016

Opmerkingen:

- Kijk voor je begint kort de vragen door. Sommige zijn gemakkelijker en doe je misschien liever eerst.
- De test is schriftelijk en je wilt graag dat het goed verbeterd wordt. Maak je ruwste schetsen dus eerst op (ander) kladpapier.

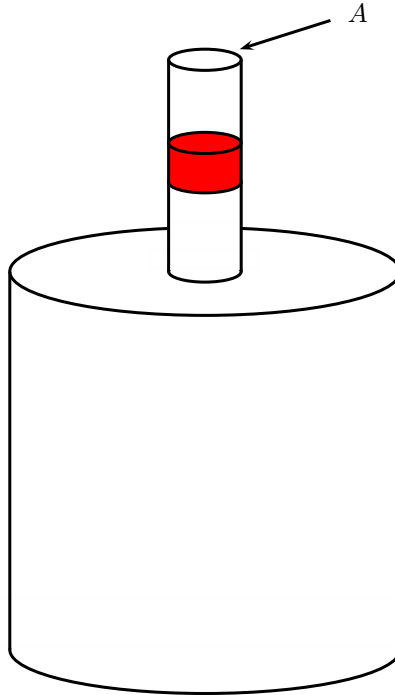
### 1 Uitzetting

We dompelen 5 kg koper, met een soortelijke warmte gelijk aan  $c_k = 0.386 \text{ J/gr}\cdot\text{K}$  en een lineaire uitzettingscoëfficiënt  $\alpha = 1.68 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , in een vat met 2 kg water (soortelijke warmte gelijk aan  $c_w = 4.19 \text{ J/gr}\cdot\text{K}$ ). Het koper heeft in het begin een temperatuur  $T_h = 550 \text{ K}$ , en het water  $T_c = 300 \text{ K}$ .

- a) Wat is de eindtemperatuur wanneer ze evenwicht bereiken?
- b) Als het koper in het begin een volume  $V_0 = 0.625 \text{ dm}^3$  inneemt, wat zal het eindvolume zijn van hzt koper? Gebruik de gekende benadering voor de volumetrische uitzettingscoëfficiënt  $\beta$  vanuit de waarde van  $\alpha$ , en neem aan dat  $\beta$  niet afhangt van de temperatuur in dit proces.

### 2 Harmonische oscillator

Een monoatomisch ideaal gas zit opgesloten in een vat zoals aangeduid in het figuur. Aan de bovenkant van het vat zit er een cilinder waarvan de cirkel een oppervlakte  $A$  heeft, met daarin een klein gewicht van massa  $m$  dat zich vrijwingsloos door het cilinder kan verplaatsen, en dat nauw tegen de rand zit zodat er geen lucht naar buiten kan. Cilinder, gewicht en vat zijn perfect thermisch geïsoleerd. Buiten het vat is er lucht aan atmosferische druk  $P_{atm}$  die een kracht uitoefent op de bovenkant van het gewicht. Wanneer het systeem zich in evenwicht bevindt, heeft het gas in het vat een volume  $V_0$  en een druk  $P_0$ . Vervolgens verplaatsen we het gewicht lichtjes naar beneden, en laten we het daar los. Het gewicht zal dan gaan oscilleren zoals een harmonische oscillator.



- a) Geef  $P_0$  in functie van  $P_{atm}$ ,  $m$ ,  $A$  en de gravitatieconstante  $g$ .  
 b) Bewijs dat voor heel kleine verschuivingen (waarbij dus zowel  $\Delta P$  als  $\Delta V$  heel klein zullen zijn, zodat  $\Delta P^2 = \Delta V^2 = \Delta P \Delta V \approx 0$ ), en aangezien het proces adiabatisch is, geldt

$$\frac{\Delta P}{P_0} + \gamma \frac{\Delta V}{V_0} = 0. \quad (2.1)$$

Misschien vind je de volgende relatie wel handig:

$$(1 + \varepsilon)^\gamma \approx 1 + \gamma \varepsilon \quad \text{voor kleine } \varepsilon. \quad (2.2)$$

- c) Vind de kracht die op het gewicht zal werken afhankelijk van de verplaatsing  $\vec{x}$  ten opzichte van de evenwichtspositie, en geef de frequentie van de oscillatie in functie van de variabelen van het probleem. *Ter herinnering: de kracht bij een harmonische oscillator heeft de vorm  $\vec{F} = -k\vec{x}$ , waarbij  $\vec{x}$  de verplaatsing vanuit de evenwichtspositie aanduidt. Dan is de frequentie gelijk aan*

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.3)$$

### 3 IJs smelten

We laten 10 kg ijs smelten bij  $0^\circ\text{C}$ . Als de smeltwarmte van ijs gelijk is aan  $3.33 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ , wat is dan de verandering in entropie, enthalpie en Gibbs vrije energie?

### 4 Mengsels

- a) Leg uit wat osmose is. In het bijzonder, leid een uitdrukking af voor de waarde van de osmotische druk zoals we in de cursus gedaan hebben.

b) Leg uit aan de hand van een tekening hoe mengen voor een kookpuntsverhoging en een vriespunt daling kan zorgen.

## 5 Faseovergangen bij zwarte gaten

Een zwart gat dat elektrisch geladen deeltjes bevat wordt wel eens een Reissner-Nordström zwart gat genoemd. Zo een zwart gat heeft een sferische horizon met een straal gelijk aan

$$R = \frac{1}{2} \left( r_s + \sqrt{r_s^2 - 4r_q^2} \right) , \quad (5.1)$$

met

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} , \quad r_q^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} . \quad (5.2)$$

Hierbij is  $G$  de gravitatieconstante ( $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ );  $c$  de snelheid van het licht ( $c \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{m/s}$ );  $\epsilon_0$  de permittiviteit van het vacuum;  $M$  de massa en  $q$  de electromagnetische lading van het zwart gat. Zijn entropie kan uitgerekend worden aan de hand van de Bekenstein-Hawking formule:

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar} , \quad (5.3)$$

met  $A$  de oppervlakte van de horizon;  $\hbar$  de constante van Planck ( $\hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ ); en  $k_B$  de constante van Boltzmann ( $1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$ ).

a) Toon aan dat

$$S_{BH}(E, Q) = \lambda \left( E + \sqrt{E^2 - Q^2} \right)^2 \quad (5.4)$$

met

$$\lambda = \frac{\pi k_B G}{\hbar c^5} , \quad E = M c^2 , \quad Q^2 = \frac{q^2 c^4}{4\pi\epsilon_0 G} . \quad (5.5)$$

b) Geef de temperatuur van zo een zwart gat als functie van de energie  $E$  en de lading  $Q$ . Voor deze vraag hoef je deel a) niet juist op te lossen, je kan anders gewoon aannemen dat je te maken hebt met een thermodynamisch systeem waarvan de entropie  $S$  van de energie  $E$  en de lading  $Q$  (wat op een constante na overeenkomt met het aantal geladen deeltjes) afhangt zoals aangegeven in vgl. (??).

c) Hoe verandert de energie naarmate we het zwart gat opwarmen bij een constante lading  $Q$ ? Met andere woorden, geef een uitdrukking voor de specifieke warmte  $C_{BH}$  bij constante  $Q$  als een functie van  $E$  en  $Q$ .

d) Voor een gegeven  $Q$ , is er een kritische waarde voor de energie,  $E_c$ , waar de specifieke warmte divergeert naar  $\pm\infty$ . Daar vinden we een faseovergang waar  $C_{BH}$  van teken verandert. Geef  $E_c$  in functie van  $Q$ . Maak een ruwe schets van  $C_{BH}$  in functie van  $E$  voor  $E \geq Q$ .

e) Geef de waarde van de temperatuur van zo een zwart gat met  $E_c = M_c c^2$ ,  $M_c = 1.99 \cdot 10^{30} \text{kg}$  (de waarde van de massa van de zon), bij het punt waar hij van fase verandert.