

Examen Algebraïsche Structuren

26 Augustus 2022

1 Theorie

1.1 Vraag 1 10 pt

Geef en bewijs de stelling van Lagrange. *Hint: Dit heeft te maken met deelgroepen en nevenklassen.* Gebruik ongeveer 1 pagina.

1.2 Vraag 2

Stel V een vectorruimte over K . Wat is dan de biduale ruimte van V ? Stel $\phi : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto ev_v$ een afbeelding. Wat is dan ev_v ? Geef de voorwaarden op V zodat ϕ een isomorfisme is.

2 Oefeningen

2.1 Oefening 1

- (1) 4 pt Stel dat $2^{113} \neq 1 \pmod{227}$. Toon dan aan dat de orde van $[2]_{227} \in \mathbb{Z}^x$ 226 is.
- (2) 6 pt Vind alle paren van gehele getallen a en b , met $b > a > 0$ waarvoor

$$3^a \equiv 3^b \pmod{663} \quad (1)$$

Hint: $663 = 3 \cdot 13 \cdot 17$.

2.2 Oefening 2 7 pt

Zij K een veld met karakteristiek niet gelijk aan 2. Zij V een K -vectorruimte met een bilineaire vorm $\langle \cdot, \cdot \rangle$, met $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anti-symmetrisch:

$$\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = -\langle w, v \rangle. \quad (2)$$

- (1) 1 pt Toon aan dat voor een $v \in V$ willekeurig geldt dat $\langle v, v \rangle = 0$.
- (2) 2 pt Gegeven $S = \{v_1, w_1, \dots, v_k, w_k\}$ in V zodat

$$\forall i, j = 1, \dots, k : \begin{cases} \langle v_i, v_j \rangle = 0 \\ \langle w_i, w_j \rangle = 0 \\ \langle v_i, w_j \rangle = \delta_{i,j} \end{cases} \quad (3)$$

Toon aan dat S een onafhankelijke deelverzameling is van V .

- (3) 4 pt Stel V is tweedimensionaal, en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ niet de nulvorm. Toon aan dat er een basis $\{v, w\}$ bestaat zodat de bijhorende Gram-matrix van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ van de vorm $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ is. Besluit dan dat de rang van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gelijk is aan 2.

2.3 Oefening 3 7 pt

Gegeven commutatieve, eindige groepen G en H , en een deelgroep K van G .

- (1) 1 pt Zij $\phi : G \rightarrow H$ een groepsomorfisme. Stel $\phi_K : K \rightarrow H$ de restrictie van ϕ tot K . Toon aan dat $\ker(\phi_K) = K \cap \ker(\phi)$.
- (2) 4 pt Toon aan dat $[\phi(G) : \phi(K)] = [G(K) : K] \cdot [\ker(\phi) : K \cap \ker(\phi)]^{-1}$.
- (3) 2 pt Stel dat er een isomorfisme

$$\psi : G/K \rightarrow \phi(G)/\phi(K) \quad (4)$$

bestaat. Toon dan aan dat $\ker(\phi) \subseteq K$.