Examen Bewijzen en Redeneren voor Informatici (Jan 2020)

1. A = verzameling van alle mensen B = verzameling van alle politici

C = verzameling van alle wetenschappers D = verzameling van alle Belgen

Schrijf de volgende verzamelingen met enkel de volgende operatoren: ∩, ∪, \, ∆, c en x:

1. Alle Belgische wetenschappers die ook politici zijn
2. Alle niet-Belgische politici
3. {(x, y)| x is een Belgische politicus en y een wetenschapper}
4. Alle mensen die noch politicus, noch wetenschapper zijn
5. B(x) = “x is een boek”, P(x) = “x is een personage”, KV(x,y) = “personage x komt voor in boek y”, V(x, y) = “boek y is een vervolg op boek x”

Schrijf de volgende zinnen dan in symbolen:

1. Voor elk boek geldt dat er een personage voorkomt dat ook voorkomt in alle vervolgen op dat boek.
2. Als een personage in 2 verschillende boeken voorkomt is het ene boek een vervolg op het andere.
3. Niet elk boek heeft een vervolg.
4. R is een bijectie van A op B, S is een bijectie van B op C

Zijn de volgende stellingen waar of onwaar:

1. R o S = S o R $(S o R)^{-1} = R^{-1} o S^{-1}$
2. |R| = |S| |A| = |C|
3. P = verzameling van alle mensen, N = verzameling van alle natuurlijke getallen

Geef voor de volgende verzamelingen aan of het een functie, afbeelding, injectie, surjectie, bijectie of geen van allemaal is. Geef enkel de meest passende term: F,A,I = I.

1. {(x, y) ∈ P^2 | y is een broer van x}
2. {(x , y) ∈ N^2 | y = 2x}
3. {(x , y) ∈ N^2 | x = 2y}
4. {(x , y) ∈ N^2 | x + y = 10}
5. Voor de verzameling van alle Nederlandse woorden, geef aan of volgende relaties een equivalentierelatie, totale orderelatie, partiële orderelatie, quasi-orderelatie of geen van deze is:
6. … komt alfabetisch vóór, of op dezelfde plaats als …
7. … is langer dan, of even lang als … bv. “waterpret” is langer dan “hond”
8. … bevat dezelfde letters als … bv. “tak” bevat dezelfde letters als “kat”
9. … bevat alle letters van … bv. “water” en “onweer” bevatten alle letters van “ree”
10. Wat is de kardinaliteit van de verzameling van alle binaire relaties tussen A en B:
11. $|A|^{|B|}$ 2. |A|\*|B| 3. $ 2^{|A|}2^{|B|}$ 4. $2^{|A||B|}$
12. Er wordt een nummerplaat gevormd met 5 tekens (cijfers en letters), hoeveel verschillende mogelijkheden bestaan er van:
13. 5 tekens willekeurig geplaatst
14. 2 letters en 3 cijfers, in willekeurige volgorde
15. Eerst 2 letters en dan 3 cijfers
16. N = Natuurlijke getallen Q = Gehele getallen R = Reële getallen

Waar of niet waar:

1. Er bestaat een injectie van N naar Q
2. Er bestaat een injectie van N naar R
3. Er bestaat een injectie van Q naar R
4. Er bestaat een injectie van Q naar N
5. Er bestaat een injectie van R naar N
6. Er bestaat een injectie van R naar Q
7. Een string bestaat uit een aantal hoofdletters en is een palindroom als deze links naar rechts hetzelfde leest als rechts naar links.
8. Hoeveel strings van lengte 10 kunnen gevormd worden?
9. Geef het aantal palindroom strings van lengte 10.
10. Bewijs m.b.v. een waarheidstabel dat: P∧¬Q = ¬(P⇒Q)
11. Vul in het volgende gedeeltelijk bewijs de correcte begrippen in:

Stelling: Als R tegelijk een orde- en equivalentie relatie is dan R(x,y) ⇔ x = y

Bewijs via ….

=>: Aangezien R een equivalentie relatie is, is R …. (Noem dit eigenschap 1) en aangezien R een orde relatie is, is R ook …. (eigenschap 2). Beschouw nu een willekeurige x,y waarvoor R(x,y) geldt, uit eigenschap …. volgt dan per definitie dat voor x,y ook R(y,x) geldt. Aangezien zowel R(x,y) als R(y,x) gelden volgt uit eigenschap …. dat x = y.

<=: Aangezien R een orde relatie is, is R per definitie …. , en dan volgt uit x = y dat R(x,y).

1. Zij A, ≤ een geordende verzameling, en X een niet-lege deelverzameling van A. Bewijs de volgende stelling: Als X een infimum heeft, is dat uniek
2. Bewijs met inductie: Als R een transitieve relatie is, dan $∀n\geq 1 : R^{n}⊆R$