

GESLOTEN BOEK

1. Zij K een getallenveld. Zij gegeven $\alpha \in K$ en het spoor en de norm van α over \mathbb{Q} . Wanneer volstaat deze informatie om te beslissen of α een algebraïsch geheel is of niet?
2. Zij gegeven een algebraïsch complex getal α . Welke zijn de gehelen $k \in \mathbb{Z}$ met de eigenschap dat $k\alpha$ een geheel getal is? (Beschrijf deze gehelen)
3. Zij K een getallenveld, en $\alpha, \beta \in K$. Bewijs dat

$$T_{K/\mathbb{Q}}(\alpha - \beta) = T_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) - T_{K/\mathbb{Q}}(\beta).$$

4. Geef een definitie van Dedekinding.
5. Wat betekent ‘unieke factorisatie van idealen’ in de ring van algebraïsche gehelen van een getallenveld?

OPEN BOEK

1. Is $\frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$ een algebraïsch geheel?
2. Vind een \mathbb{Z} -basis voor de ring van algebraïsche gehelen van $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-3})$.
3. Zij $p > 2$ een priemgetal, en $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ het p -de cyclotome veld.
 - (a) Bewijs: Er is precies één deelveld van K dat kwadratisch is over \mathbb{Q} .
 - (b) Geef expliciet $d \in \mathbb{Z}$ (in functie van p) kwadraatvrij zodat $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subseteq K$.
4. Zij K een getallenveld en \mathcal{O}_K de ring van algebraïsche gehelen van K . Zijn A, B niet-nul-idealén in \mathcal{O}_K . Is het waar dat

$$(A^2B) \cap (AB^2) = A^2B^2?$$

5. Zij K een getallenveld met discriminant Δ_K . Veronderstel dat $(\frac{2}{\pi})^t \sqrt{|\Delta_K|} < 3$ en $2\mathcal{O}_K$ een priemideaal is. Bewijs dat \mathcal{O}_K een hoofdideaaldomein is.
6. Bepaal de structuur van de groep van de ideaalklassen van $\mathbb{Q}(\sqrt{-61})$. Vind een generator.