

diff 21 december 2016–correctie?

misschien opgesteld door een lid van de roemruchte MacHerbie Klan
misschien ook niet...

15 december 2024

1

1 oefening 1

1.1 1 a

Zij $f(x) = e^{2x}y(x)$, dan herschrijft de vergelijking naar

$$f - 2f' + \lambda f = 0$$

Als $\lambda < 1$ is de oplossing gegeven door:

$$f(x) = Ae^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + Be^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

Als $\lambda = 1$ is de oplossing gegeven door:

$$f(x) = (A + Bx)e^x$$

Als $\lambda > 1$ is de oplossing gegeven door:

$$f(x) = e^x(A \sin(\sqrt{\lambda - 1}x) + B \cos(\sqrt{\lambda - 1}x))$$

¹Disclaimer: geen enkele van de informatie in dit document is geverifieerd noch is ze volledig.

1.2 1b

Door de randvoorwaarden na te gaan is er enkel de triviale oplossing voor $\lambda < 1$. Voor $\lambda = 1$ is er één oplossingsfamilie, nl:

$$y(x) = Bxe^{-x}$$

Voor $\lambda > 1$ zijn alle eigenwaarden van de vorm $\lambda = 1 + (k + \frac{1}{2})^2\pi^2$. De oplossingen zijn dan gegeven door:

$$y(x) = Ae^{-x} \sin(\sqrt{\lambda - 1}x)$$

2 oefening 2

2.1 2a

De eerste is gewoon de warmtevergelijking, de tweede volgt uit het feit dat de uiteinden van de staaf steeds de temperatuur van het ijs aannemen, en de derde volgt uit het feit dat op $t = 0$ de staaf homogeen een temperatuur van 100^2 heeft.

We stellen dat $u(x, t) = T(t)\Xi(x)$, waaruit volgt dat $\lambda \leq 0$ geen niet-triviale oplossingen heeft. Als $\lambda > 0$ is $\lambda = (\frac{n\pi}{50})^2$ voor $n \in \mathbb{N}_0$. Dit levert de algemene oplossing:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi}{50})^2 kt} \sin((\frac{n\pi}{50})x)$$

De beginvoorwaarden zijn als volgt te berekenen:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin((\frac{n\pi}{50})x) = 100$$

Door beide leden te vermenigvuldigen met $\sin((\frac{m\pi}{50})x)$ en te integreren van 0 tot 50 vinden we dat:

$$c_{2n} = 0; c_{2n+1} = \frac{400}{(2n+1)\pi}$$

²wiskundigen zijn cringe, ze gebruiken geen eenheden

Hieruit volgt:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400}{(2n+1)\pi} e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{50}\right)^2 kt} \sin\left(\left(\frac{(2n+1)\pi}{50}\right)x\right)$$