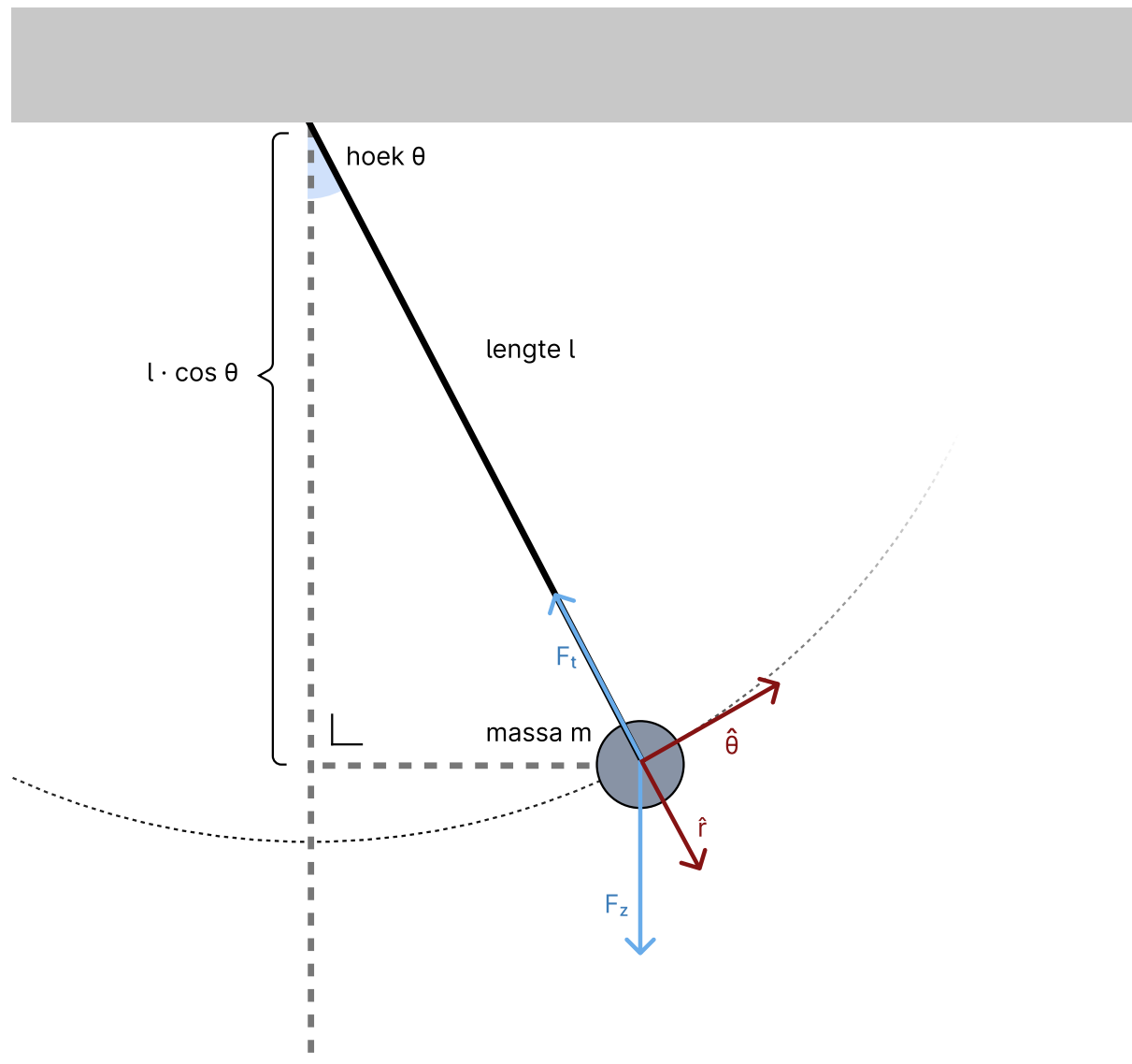


Proefexamen Algemene Natuurkunde I

december 2023 – 2024

Vraag 1 (over les 5)

a)



b)

$m\vec{a} = \vec{F}_z + \vec{F}_t$. We splitsen de versnelling op in radiële en tangentiële componenten:

$$\begin{cases} ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta & (\text{radiële component}) \\ -m \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = +mg \cos \theta + (-F_t) & (\text{tangentiële component}) \end{cases}$$

Het is hier praktischer om de bovenste vergelijking te nemen en om te vormen:

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

c)

Behoud v. energie: $E_p + E_k = \text{cte.}$

$$E_p = mg(l - l \cos \theta) = mgl - mgl \cos \theta$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(l \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Aangezien de som een constante is, is de afgeleide naar de tijd gelijk aan nul. We bekomen:

$$mgl \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{m}{2} l^2 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

Hierin valt heel wat te schrappen:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

d)

$\sin \theta \approx \theta$ voor kleine θ .

We benaderen dus: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta \approx 0 \xrightarrow{\text{HT}} A \cos(\omega t + \varphi)$

A en φ zijn eigenlijk integratieconstanten. We gaan die bepalen met de volgende beginvoorwaarden:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \rightarrow A \cos \varphi = \theta_0 \rightarrow A = 1 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \rightarrow A \omega \sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$. In de vergelijking wordt dat:

$$-\theta_0 \omega^2 \cos(\omega t) + \frac{g}{l} \theta_0 \cos(\omega t) \approx 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\text{Dus } \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

e)

De volgende grafiek is rechtstreeks gecopypast uit [1].

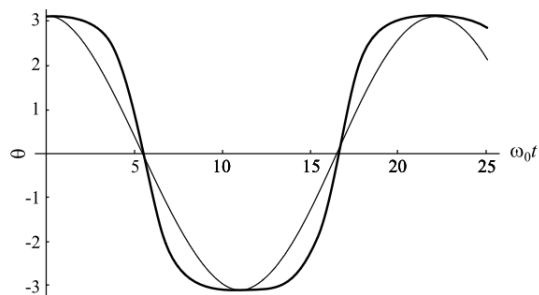


Figure 6 - Angular displacement θ as a function of $\omega_0 t$ for $\theta_0 = 0.99\pi$. Equation (31), bold line. Equation (32), thin line.

Vraag 2 (over les 6)

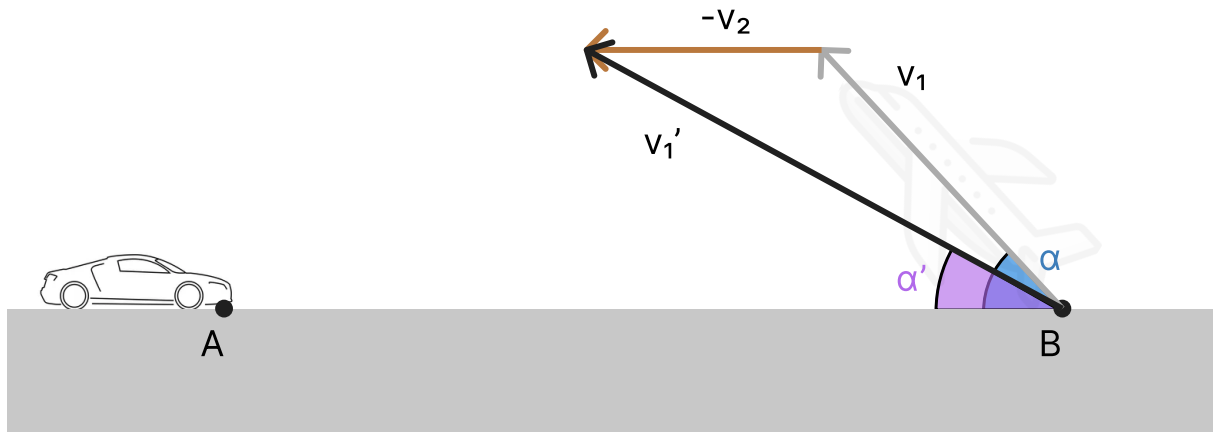
Uit de definitie krijgen we: $W \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{wrijving}} \cdot l \cdot \cos \theta^* = F_N \cdot \mu_k \cdot l = -\mu_k mg \cos(\varphi) l = -1200 \text{ J}$

*We nemen hier θ als de hoek tussen de wrijvingskracht en de bewegingsrichting, dus hier 180° .

Vraag 3 (over les 2)

a)

Bemerk hiervoor dat $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2$, dus $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. We noemen de dan onstane hoek α' .



b)

We gebruiken Pythagoras: $v_1' = \sqrt{(-v_2 - v_1 \cos \alpha)^2 + (v_1 \sin \alpha)^2}$ en dit herwerken we tot $v_1' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}$.

c)

We gebruiken het feit dat de “hoogte” van de driehoeken gevormd door de vector v_1 vanuit B en v_1' vanuit B gelijk is. Dus $v_1' \sin \alpha' = v_1 \sin \alpha$, en dus $\sin \alpha' = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_1'}$. We vullen dan de v_1' in die we vonden in b.

Vraag 4 (over les 5, 6 en 7)

a)

Er spelen twee krachten: de zwaartekracht en de veerkracht die tegenwerkt. Pomp die handel door de tweede wet van Newton, en dan krijgen we in de stilstaande massa:

$$\begin{aligned}
 m_1 \vec{a} &= \vec{F}_v + \vec{F}_{zw} \\
 \Leftrightarrow \underbrace{m_1 \frac{d^2 y}{dt^2}}_{\text{in rust, dus } = 0} &= -k(-d) + (-m_1 g) \\
 \Rightarrow k &= \frac{m_1 g}{d}
 \end{aligned}$$

De tweede massa moet precies in d tot rust komen ($t = \frac{T}{2}$). Ze vertrekt ook vanuit rust. Daartussen kunnen we de wet van behoud van energie toepassen. We kiezen het referentiepunt voor de zwaartekracht zo dat dat nul is vlak voor we het loslaten.

$$\begin{aligned} \text{BvE} : E_{\text{p,v}} + E_{\text{p,zw}} + E_k &= \text{cte} \\ 0 + 0 + 0 &= \frac{k(-d)^2}{2} + m_2 g(-d) + 0 \\ \Leftrightarrow m_2 &= \frac{kd^2}{gd} = \frac{kd}{2} \end{aligned}$$

We vullen de gevonden k in:

$$m_2 = \frac{m_1 g d}{2 d g} = \frac{m_1}{2}$$

b)

De arbeid van de wrijvingskracht (die we helaas niet kunnen negeren) zorgt voor wat verlies van mechanische energie (aan warmte e.d.) naarmate de tijd verloopt. Let wel: die wrijving is inwendig, d.w.z. tussen de deeltjes van de veer zelf.

De (foute) aanname hier is dus dat de wrijving verwaarloosbaar is (en ja, natuurlijk is dat de aanname, 't is AN1 bro).

Nota bene: voor een hangende veer zou de uitwerking exact hetzelfde zijn.

Bibliografie

- [1] A. Beléndez, C. Pascual, D. I. Méndez, T. Beléndez, en C. Neipp, 'Exact solution for the nonlinear pendulum', *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, nr. 4, pp. 645-648, 2007, doi: 10.1590/s1806-11172007000400024.