Kansrekenen en Statistiek II

20 juni 2022

1 Theorie

1.1 Stelling 4.9 (iii)

Stel $X_n \xrightarrow{D} X$ en $Y_n \xrightarrow{P} c$ met $c \in \mathbb{R}$. Toon aan dat

$$X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$$

1.2 Stochastische processen

Geef de definitie van een Markovketen en bijhorende transitiematrix. Wat zijn de eigenschappen van deze matrix? Formuleer en bewijs de vergelijking van Chapman-Kolmogorov.

1.3 Schatters

Definieer asympotische normaliteit van een univariate schatter T_n voor een parameter θ. Toon aan dat dit impliceert dat T_n begrensd is in kans, en dat T_n een zwak consistente schatter is voor θ.

2 Oefeningen

2.1 Schatters

Zij $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. met dezelfde verdeling als X met dichtheid

$$f_X(x) = \frac{2\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{2\alpha-1} \exp \frac{-\alpha x^2}{\theta} \qquad (x > 0)$$

1. Toon aan dat X^2 een Gammaverdeling volgt
2. Toon aan dat $T_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$ een sufficiënte statistiek is voor θ.
3. Vind de UMVUE voor θ, noteer deze met U_n. Je moet de volledigheid van een statistiek niet aantonen.
4. Bereken de MSE van U_n
5. Wat kan je zeggen over de zwakke consistentie van U_n?

2.2 R-code

Voor alle $j \in \mathbb{N}_0$ definiëren we de s.v. X_j volgens

$$P\left(X_j = \frac{1}{j}\right) = 1 - \frac{1}{j^2} \qquad P\left(X_j = j\right) = \frac{1}{j^2}$$

Gegeven is onderstaande R-code[1]

```
n = 500

genXj = function(j){
randgetal = runif(1)
if (randgetal > 1/j^2){
return(1/j)
} else {
return(j)
}
}

J = c(5,10,25)
```

[1] Was ietsje professioneler geschreven, maar deed hetzelfde. De kleurtjes zijn een artistieke toevoeging.

```
res = matrix(0,nrow=3,ncol=n)
for (k in c(1:3)){
for(i in c(1:n)){
res[k,i] = genXj(J[k])
}
}

plot(ecdf(res[1,]),col='red',main='',lty=1)
lines(ecdf(res[2,]),col='green',lty=2)
lines(ecdf(res[3,]),col='blue',lty=3)
legend(-5, 1, legend=c("5", "10","25"),
col=c("red", "green","blue"), lty=1:2, cex=0.8)
```

1. Wat illustreert de grafiek gegenereerd door deze code? Toon dit analytisch aan.
2. Is er almost-sure convergentie?
3. Is er convergentie in gemiddelde van orde p? Zo ja, voor welke p?
4. Welke vorm van convergentie is nog niet aan bod gekomen? Geldt er convergentie van deze vorm?

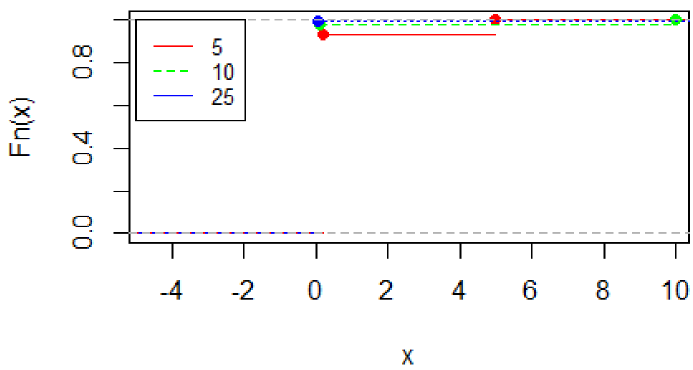

Figure 1: Grafiek gegenereerd door de R-code.

3 Oplossingen van een student

3.1 Oefening 1

1. $X^2 \sim \Gamma(\alpha, \frac{\theta}{\alpha})$
2. Factorisatiestelling
3. $\frac{T_n}{n}$
4. $\frac{\theta^2}{\alpha n}$
5. Zwak consistent want onvertekend en $MSE \to 0$ voor $n \to \infty$.

3.2 Oefening 2

1. $X_j \xrightarrow{D} 0$ (ontaarde verdeling in 0)
2. Ja. Toon bijvoorbeeld aan dat voor alle $\varepsilon > 0$:

   $$\sum_{j=1}^{\infty} P(|X_j| > \varepsilon) < \infty$$

   Het lukt ongetwijfeld ook vanuit de definitie, maar ik ben niet echt fan van werken met die Ω.
3. Ja. Voor $0 < p < 2$.
4. $X_j \xrightarrow{P} 0$. Uiteraard, volgt uit alle vorige vragen.