

Examen Lineaire Algebra januari 2022

Een Vaesliefhebber

January 2022

1 Vraag 1

Zij $L : V \rightarrow V$ een lineaire transformatie en λ een eigenwaarde van L .

- Wat verstaan we onder de meetkundige multipliciteit $d(\lambda)$ en de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$ van λ ?
- Bewijs dat $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.

2 Vraag 2

Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- Zij $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ een lineaire transformatie, Zij $v, w \in \mathbb{R}^2$ verschillend van de nulvector zodat $\ker L = \text{vct}\{v\}$ en $\text{Im } L = \text{vct}\{w\}$. Dan vormen v en w een basis voor $\mathbb{R}^2$.
- Zij $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ zodat $AB = 0$. Dan is $\text{rang } A + \text{rang } B \leq 3$.
- Zij $v \in \mathbb{R}^n$ verschillend van de nulvector. Dan is de verzameling

$$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid v \text{ is een eigenvector van } A\}$$

een deelruimte van $\mathbb{R}^{n \times n}$.

3 Vraag 3

Beschouw de lineaire afbeelding $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : X \mapsto AX$ waarin we de vectoren

$X \in \mathbb{R}^3$ beschouwen als kolomvectoren. Neem ook $W_1 = \text{vct}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ en

$$W_2 = \text{vct}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Neem dan de verzameling

$$W = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid L_A(W_1) \subset W_1 \text{ en } L_A(W_2) \subset W_2\}$$

- a. Toon aan dat W een deelruimte van $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ is.
- b. Bepaal een basis en dimensie voor W .