

Examen Algebra I

13/01/2020

Theorie

Vraag 1

Bewijs de stelling van Cayley (stelling werd gegeven).

Vraag 2

Bewijs de stelling van Bézout (stelling werd gegeven).

Vraag 3

- a) Geef de definitie van het toegevoegde/adjunct (A^*) van een lineaire transformatie $A: V \rightarrow V$.
- b) Bewijs dat als de adjuncte transformatie bestaat, deze ook uniek is.
- c) Bewijs dat de adjuncte van A^* , $(A^*)^*$, gelijk is aan A .

Oefeningen

Vraag 1

Zij G een p -groep met $|G| = p^n$ voor p priem en $n > 1$

- a) Zij N een strikte normaaldeler van G . Toon aan dat er een $x \in Z(G/N)$ bestaat van orde p
- b) Zij N een strikte normaaldeler van G . Toon aan dat er een normaaldeler $M \triangleleft G$ bestaat met $N \subseteq M \subseteq G$ en $[M : N] = p$
- c) Toon aan dat G oplosbaar is

Vraag 2

Zij $R, +, \cdot$ een commutatieve ring met eenheidselement 1. We zeggen dat R een lokale ring is als R een uniek maximaal ideaal heeft.

- a) Geef een voorbeeld (zonder c) te gebruiken) van een lokale ring en leg zorgvuldig uit.
- b) Toon aan dat R een ring is als en slechts als

$$I = \{r \in R \mid r \text{ is geen eenheid}\}$$

een ideaal van R is. Toon ook aan dat I dan het unieke maximale ideaal is.

- c) $R, +, \cdot$ is een deelring van $\mathbb{Q}, +, \cdot$ gegeven door

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b \text{ is oneven} \right\}$$

Is R een lokale ring? Leg uit.

Vraag 3

Beschouw het veld $E = \mathbb{Q}(\sqrt{6}i - \sqrt{5})$

- a) Bepaal een basis van E als $\mathbb{Q}$ -vectorruimte
- b) Zoek een veelterm $f \in \mathbb{Q}[x]$ zodat E het ontbindingsveld is van f over $\mathbb{Q}$

Vraag 4

Beschouw $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ met $A^2(A^2 - 4I) = 0$. Wat zijn de mogelijke minimale veeltermen van A^3 ? Geef ook telkens een voorbeeld van A en bijhorende A^3 . Leg zorgvuldig uit.