

Examen Numerieke Wiskunde

14 juni 2019, 8:00

Dit document is natuurlijk een herschrijving van de vragen uit mijn geheugen. Waar ik echter andere toevoegingen heb gedaan heb ik deze in *cursief* genoteerd.

Dit jaar was het examen uitzonderlijk volledig schriftelijk, aangezien de prof ziek was en dit ook al ruim op voorhand geweten was. Het examen is dus opgesteld als schriftelijk examen en niet als examen waar nog een mondelinge toelichting bijhoort.

Vraag 1

Waar of niet waar? Geef voldoende uitleg

- De interpolerende veelterm van $n + 1$ meetpunten is altijd van strikte graad n .
- Gegeven $Ax = b$ een lineair stelsel. Indien de relatieve fout op b (de residu's) van de grootteorde van ϵ_{mech} is, is de fout op x ook van die grootteorde. (*Tip: boek p. 72, sectie 3.10.4*)
- De convergentiefactor van de methode van de machten wordt bepaald door de spectraalradius van de matrix. (*Niet zeker over deze vraag*)

Vraag 2

We berekenen de functie

$$f(x) = x^3 - x^2 = (x^3 + 1) - (x^2 + 1)$$

op twee manieren (de twee schrijfwijzen die hier dus gegeven zijn), rond $x = 0.000001$.

1. Bespreek de conditie van dit probleem.
2. Bespreek de stabiliteit van de twee methodes **voor willekeurige** x .
3. Hoeveel beduidende cijfers verwacht je te verliezen rond de gegeven x voor beide methodes?

Vraag 3

Een bedrijf maakt balken met een bepaalde dikte. Deze dikte varieert tussen twee waarden, D_{min} en D_{max} . Deze variaties zorgen voor kleine variaties in andere eigenschappen, zoals de kleinste eigenfrequentie. We willen de gemiddelde kleinste eigenfrequentie weten van alle balken. De eigenfrequentie van een balk wordt bepaald als de grootste eigenwaarde (λ_{max} van een matrix $A(D)$ die afhangt van de dikte D van de balk. We gebruiken de volgende formule:

$$\omega_{gem} = \frac{\int_{D_{min}}^{D_{max}} \lambda_{max}(A(D)) dD}{D_{max} - D_{min}}$$

Welke methodes zou je gebruiken om dit uit te rekenen? Geef voor elke formule een motivatie en indien het een iteratieve methode is ook de iteratieformule. Schrijf voor elke methode niet meer dan 3 regels.

Vraag 4

Ik heb mijn best gedaan om de gebruikte functie te herinneren. Hopelijk is deze ook correct. Bij voorbaat mijn excuses moest dit niet zo zijn. Indien deze correct is zou alles vrij makkelijk moeten uitkomen, dus als het niet uitkomt was ik waarschijnlijk fout.

Gegeven de functie:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

We berekenen de nulpunten van deze functie met de methode van Newton-Raphson.

1. Geef de substitutieformule $F(x)$.
2. Wat zijn de vaste punten? Is er voor deze punten lokale convergentie?

3. Wat is de convergentieorde en bijbehorende convergentiefactor? Komt dit overeen met wat je theoretisch verwacht van de methode van Newton-Raphson? *(De intentie was duidelijk dat je met behulp van andere methodes de convergentieorde en -factor afleidt in plaats van deze gewoon uit het boek af te lezen, en dan ondervindt dat de gegeven ordes en factor in het boek kloppen.)*
4. Teken voor een aantal karakteristieke beginwaarden het convergentieproces. *(Tip: De TI-84+ kan het convergentieproces visualiseren. Gebruik de SEQ-modus en zet dan bij FORMAT de eerste regel op WEB ipv TIME)*

Vraag 5

We willen de afgeleide van de functie $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2x^2}$ berekenen in $x = 1$. We gebruiken hiervoor de differentiatieformule $\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$ voor dalende h .

Gegeven zijn twee grafieken:

- *Eén van de gevonden waarde in functie van h , die convergeert naar 0.3 maar op het einde steeds heviger begint te oscilleren.*
 - *Eén van de relatieve fout op de gevonden waarde. Dit is een log-loggrafiek. We zien de relatieve fout dalen langs een rechte met richtingscoëfficiënt ongeveer 1 tot de fout ongeveer 10^{-8} is. Daarna stijgt de relatieve fout weer op een niet-egale wijze.*
1. Beschrijf wat er gebeurt. *Dus waarom de fout weer begint te stijgen enz.*
 2. Wat is de initiële convergentieorde?
 3. Wat is de bijbehorende convergentiefactor?
 4. Kan je dit analytisch onderbouwen?

Ik ben vooralsnog niemand tegengekomen die deze vraag met zekerheid had beantwoord.