

Examen Kansrekenen

Oplossingen

22 juni 2018

Vraag 1

- a) Zie cursus.
- b) Zie cursus.
- c)
- $X_1 \sim \text{Geom}(0.63)$. X_1 is geometrisch verdeeld met faalkans 63%.
 - $X_2 \sim H(557, 30, 10)$. X_2 is hypergeometrisch verdeeld met $N = 557$, $r = 30$ en $n = 10$.
 - $E[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 7 \cdot E[X_1] + 2 \cdot E[X_2]$
Hierbij is $E[X_1] = \frac{0.63}{0.37}$ en $E[X_2] = \frac{30 \cdot 10}{557}$. En dus $E[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 12,9961$.
 $\text{Var}[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 7^2 \cdot \text{Var}[X_1] + 2^2 \cdot \text{Var}[X_2]$
Hierbij is $\text{Var}[X_1] = \frac{0.63}{0.37^2}$ en $\text{Var}[X_2] = \frac{30 \cdot 10 \cdot 527 \cdot 547}{557^2 \cdot 556}$. En dus $\text{Var}[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 227,4984$.

Vraag 2

- a) Stel $P_A, \dots$ de kans dat component $A, \dots$ faalt. En neem S voor het systeem.
 $P(\text{Werkend systeem}) = 1 - P_S = 1 - (1 - (1 - P_A) \cdot (1 - P_{BCDE})) = (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot P_{CDE}) = (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot (1 - (1 - P_{CD}) \cdot (1 - P_E))) = (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot (1 - (1 - P_C \cdot P_D) \cdot (1 - P_E)))$. De gegevens invullen geeft dan: $P(\text{Werkend systeem}) = 92,64\%$.
- b) Uit de wet van Bayes volgt:
$$P(D|\bar{S}) = \frac{P(\bar{S}|D) \cdot P(D)}{P(\bar{S}|D) \cdot P(D) + P(\bar{S}|\bar{D}) \cdot P(\bar{D})} = \frac{(1 - P_{ABCE}) \cdot P_D}{(1 - P_{ABCE}) \cdot P_D + P_{ABE} \cdot (1 - P_D)}$$

Hierbij is $P_{ABE} = 1 - (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot P_E) = 0,069$ en $P_{ABCE} = 1 - (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot (1 - (1 - P_C) \cdot (1 - P_E))) = 0,0918$.
En dus $P(D|\bar{S}) = 76,6931\%$

Vraag 3

- a) Opdat f_X een verdelingsfunctie is, moet de integraal over $\mathbb{R}$, 1 zijn.
 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c e^{-|u|} du = \int_{-\infty}^0 c e^u du + \int_0^{+\infty} c e^{-u} du = c \cdot (1+1)$.
En dus moet $c = \frac{1}{2}$.
- b) Er geldt $Y = h(X) = k \cdot X + l$, merk op dat h strikt stijgend is op $\mathbb{R}$ en dat de inverse is gegeven door $h^{-1}(x) = \frac{x-l}{k}$. Dan volgt uit de regel van monotone transformaties dat voor elke $y \in \mathbb{R}$, $f_Y(y)$ gegeven wordt door:
 $f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| = \frac{c}{bk} e^{-\frac{|y-(\mu k + l)|}{bk}}$.
Dus geldt $Y \sim \text{Laplace}(\mu k + l, bk)$.

Vraag 4

- a) $T \sim N(60, 20^2)$. $P(T > 60) = \frac{1}{2}$, direct gevolg van de symmetrie van de normale verdeling.
- b) Zij X het aantal passagiers dat niet voor 10u00 aankomt. Dan $X \sim B(175, \frac{1}{2})$. Merk op dat $175 \geq 30$ en $175 \cdot \frac{1}{2} \geq 5$, zodat $X \approx Y \sim N(87, 5; \sqrt{(43, 75)^2})$. $P(X < 80) \approx P(Y \leq 79, 5) = P(Z \leq -1, 21) = 1 - P(Z \leq 1, 21) = 1 - 0, 887 = 11, 3\%$. Hierbij is $Z = \frac{Y - 87, 5}{\sqrt{43, 75}}$. Merk op dat in R de normale verdeling als parameters μ en σ neemt, niet de variantie.

Vraag 5

Merk op dat $X_1 \sim \varepsilon(1)$, $X_2 \sim \varepsilon(0, 5)$ en $X_3 \sim \Gamma_{2, 12}$. Voorts geldt $M_{12X_1+6X_2+X_3}(t) = M_{X_1}(12t) \cdot M_{X_2}(6t) \cdot M_{X_3}(t)$, want X_1, X_2 en X_3 zijn onafhankelijk. En dus vinden we:

$$M_{12X_1+6X_2+X_3}(t) = \begin{cases} (1 - 12t)^{-4} & t < \frac{1}{12} \\ \infty & \text{anders} \end{cases}$$

Dit is juist de momentgenererende functie van $\Gamma_{4, 12}$