

# Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Reinoud Berkein

17 januari 2018

## Samenvatting

Een korte samenvatting van definities uit de cursus.

## Hoofdstuk 1

- Doorsnede: De verzameling die alle elementen bevat die zowel in A als in B zitten, en geen andere.  
 $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Unie: De verzameling die alle elementen van A bevat, alle elementen van B en geen andere.  
 $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Verschil: De verzameling van alle elementen van A die niet in B voorkomen.  
 $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Symmetrisch verschil: De verzameling van alle elementen die in de ene zitten, maar niet in de andere.  
 $\{x \mid (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\}$
- Complement: De verzameling van alle individuen die geen element zijn van A.  
 $\{x \mid x \notin A\}$
- Machtsverzameling: De verzameling van alle deelverzamelingen van A.  $\{A' \mid A' \subseteq A\}$

## Hoofdstuk 2

- Sommige elementen:  $\exists x \in S : P$
- Juist één element:  $\exists! x \in S : P$
- Geen enkel element:  $\nexists x \in S : P$  of  $\neg \exists x \in S : P$  of  $\forall x \in S : \neg P$
- Modus ponens: Als  $P$  waar is, en  $P \Rightarrow Q$  is waar dan is  $Q$  ook waar.
- Modus tollens: Als  $Q$  onwaar is, en  $P \Rightarrow Q$  is waar dan is  $P$  ook onwaar.

## Hoofdstuk 3

- Vermoeden: Een stelling die waarschijnlijk waar is, zonder ze te kunnen bewijzen
- Lemma: Een hulpstelling
- Gevolg: Een stelling wiens bewijs triviaal is.

## Hoofdstuk 4

- Probleem: Een precieze omschrijving van een algemene taak.
- Instantie v/e probleem: De combinatie van een probleem met een specifieke invoer.
- Tijdscomplexiteit v/e algoritme: Het aantal basisoperaties dat het algoritme uitvoert om de oplossing te bekomen.
- Tijdscomplexiteit v/e probleem: De kleinste mogelijke tijdscomplexiteit van een algoritme die dat probleem oplost, voor die probleemgrootte.
- bewijs via:
  - substitutie
  - herhaalde gevolg trekking
  - wederzijdse implicatie
  - constructie
  - gevalsonderscheid
  - contradictie (uit het ongerijmde, dankzij molus tollens)
  - inductie
  - redeneren met ontkenning
  - vaststelling
  - tekening
- Invariant: Een bewering die we met een bepaald punt in een algoritme associëren en waarvan we kunnen aantonen dat die altijd waar is op dat punt.

## Hoofdstuk 5

- Cartesisch product van 2 verz.:  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
- Cartesisch product van n verz.:

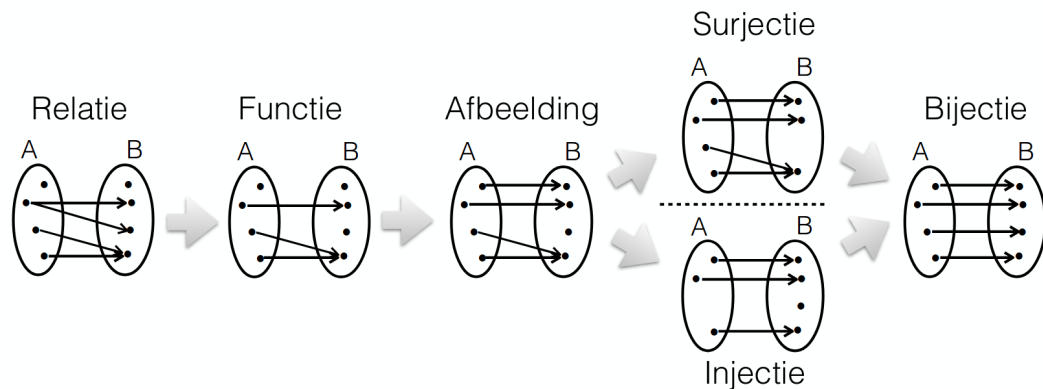
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

$$A^1 = A \text{ en } \forall n > 1 : A^n = A^{n-1} \times A$$

- Relatie: Een deelverzameling van  $A \times B$
- Relatie over  $A_1, A_2, \dots, A_n$ : Een deelverzameling van  $\prod_{i=1}^n A_i$
- Inverse relaties van R:  $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$
- Samenstelling:  $S \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in B; (x, y) \in R \wedge (z, y) \in S\}$   
 $R^1 = R \text{ en } \forall n > 1 : R^n = R \circ R^{n-1}$   
 $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

## Hoofdstuk 6

- Functie van A naar B: Een relatie  $R \subseteq A \times B$  is een functie van A naar B als en slechts als voor elke  $x \in A$  hoogstens één  $(x, y) \in R$  bestaat.  
 $f : A \rightarrow B \quad \forall x \in A : (x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$
- Domein van  $f : A \rightarrow B : \{x \mid \exists y : (x, y) \in f\}$
- Bereik van  $f : A \rightarrow B : \{y \mid \exists x : (x, y) \in f\}$
- Afbeelding: Een functie  $f : A \rightarrow B$  is een afbeelding van A naar B als en slechts als voor elke  $x \in A$  precies één  $(x, y) \in f$  bestaat.
- Surjectie: Een afbeelding  $f : A \rightarrow B$  is een surjectie als en slechts als elke  $y \in B$  het beeld is van een  $x \in A$ .  
 $\forall y \in B : \exists x \in A : (x, y) \in f$
- Injectie: Een afbeelding  $f : A \rightarrow B$  is een injectie als en slechts als elke  $x \in A$  op een verschillende  $y \in B$  afgebeeld wordt.  
 $x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')$
- Bijjectie: Een relatie  $R \subseteq A \times B$  van A naar B als en slechts als voor elke  $x \in A$  precies één  $(x, y) \in R$  bestaat, en voor elke  $y \in B$  precies één  $(x, y) \in R$ .



- Transformatie: Een functie  $f : A \rightarrow A$  is een transformatie als en slechts als elke  $x \in A$  een beeld heeft onder  $f$ .
- Permutatie: Een functie  $f : A \rightarrow A$  is een permutatie als en slechts als elke  $x \in A$  een beeld heeft onder  $f$  en precies één keer het beeld is van een  $x$  onder  $f$ .
- Samenstelling van een  $f : A \rightarrow B$  en  $g : B \rightarrow C$  is de functie  $h : A \rightarrow C : x \mapsto g(f(x))$ .
- Inverse functie:  $f : A \rightarrow B : \forall x \in A : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$   
 $f^{-1} : B \rightarrow A : f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
- Identiteitsfunctie:  $i_A : A \rightarrow A : x \mapsto x$

## Hoofdstuk 7

- Reflexief in  $R \subseteq A \times A$ :  $\forall x \in A : (x, x) \in R$
- Anti-reflexief in  $R \subseteq A \times A$ :  $\forall x \in A : (x, x) \notin R$
- Symmetrisch in  $R \subseteq A \times A$ :  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$
- Anti-symmetrisch in  $R \subseteq A \times A$ :  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- Transitief in  $R \subseteq A \times A$ :  $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
- Equivalentierelatie: Een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is. ( $\sim$ )
- Equivalentieklasse: De verzameling van alle elementen van  $A$  die equivalent zijn met  $x$ .  $K(x) = \{y \in A \mid x \sim y\}$
- Partitie:  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  is een partitie van  $A$  als en slechts als
  1.  $\forall x \in A : \exists! P_i \in P : x \in P_i$
  2.  $\forall P_i \in P : P_i \neq \emptyset$
- Quotiënt verzameling van  $a$  onder  $\sim$ : De partitie van  $A$  die bestaat uit alle equivalentieklassen van  $A$  onder  $\sim$ .  $A/\sim$
- Orderrelatie: Een relatie die reflexief, antisymmetrisch en transitief is.  $x \preceq y$
- Totale orde: Een orderrelatie waarvan geldt dat  $\forall x, y : x \preceq y \vee y \preceq x$ .
- Partiële orde: Een niet totale orderrelatie.
- Geordende verzameling: Een verzameling  $A$  waarover een orderrelatie  $\preceq$  gedefinieerd is.  $A, \preceq$
- Bovengrens:  $(X \subseteq A, \preceq) a \in A$  is een bovengrens voor  $X$  als en slechts als  $\forall x \in X : x \preceq a$ .
- Ondergrens:  $(X \subseteq A, \preceq) a \in A$  is een bovengrens voor  $X$  als en slechts als  $\forall x \in X : a \preceq x$ .
- Supremum van  $X$ :  $(b \in A, \preceq)$   $b$  is de bovengrens voor  $X$  en  $b \preceq b'$  ( $b' =$  andere bovengrens). Met andere woorden  $b =$  kleinste bovengrens.
- Infimum van  $X$ :  $(o \in A, \preceq)$   $o$  is de ondergrens voor  $X$  en  $o' \preceq o$  ( $o' =$  andere ondergrens). Met andere woorden  $o =$  grootste ondergrens.
- Complete tralie: Een geordende verzameling  $A, \preceq$  met de eigenschap dat elke  $X \subseteq A$  een supremum en een infimum in  $A$  heeft.
- Quasi-orde: Een relatie die reflexief en transitief is.

## Hoofdstuk 8

- Kardinaliteit van een verzameling: Het aantal elementen dat een verzameling bevat.  $|X|$  of  $\#S$

1.  $|A| \leq |B|$  als en slechts als er een injectie van  $A$  naar  $B$  bestaat.
2.  $|A| = |B|$  als en slechts als er een bijectie van  $A$  en  $B$  bestaat.
3.  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Inclusie-exclusie-principe:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I| \text{ oneven}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I| \text{ even}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

- Kardinaliteit van het cartesisch product:  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- Kardinaliteit van een machtsverzameling:  $|P(A)| = 2^{|A|}$
- Aantal afbeeldingen van  $A$  naar  $B$ :  $|B^A| = |B|^{|A|}$
- Aantal injecties van  $A$  naar  $B$ :  $\frac{n!}{(n-m)!}$
- Aantal bijecties van  $A$  naar  $B$ :  $n!$
- Aantal combinaties van  $m$  elementen uit  $A$ :  $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m} = C_n^m$
- Kardinaliteit van  $\mathbb{N}$ :  $\aleph_0$  (aftelbaar oneindig)
- Kardinaliteit van  $\mathbb{Z}$ :  $\aleph_0$
- Kardinaliteit van  $\mathbb{Q}$ :  $\aleph_0$
- Kardinaliteit van  $\mathbb{R}$ :  $\neq \aleph_0$  (onaftelbaar)
- Rekenregels
  1.  $\forall n \in \mathbb{N} : n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$
  2.  $\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$
  3.  $\forall n \in \mathbb{N} : \aleph_0^n = \aleph_0$
  4.  $\forall n \in \mathbb{N} \text{ met } n > 1 : n^{\aleph_0} \geq \aleph_0$
  5. Het aantal deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$  is  $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ .
  6. Het aantal functies van  $\mathbb{N}$  naar  $\mathbb{N}$  is  $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$ .