

Vraag 1. /2

Bepaal het convergentieinterval ($x \in \mathbb{R}$, bespreek ook de eindpunten) voor de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n+1} (x - \pi)^n.$$

Vraag 2. /2

Zij $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ een rij zodat $0 \leq a_n \leq n^2$. Toon volgende eigenschap aan.

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$, dan divergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (n - \sqrt{n^2 - a_n})$

Opm: Indien je gebruikt maakt van een convergentie- en/of divergentiecriterium, beargumenteer dan duidelijk dat alle voorwaarden van het criterium voldaan zijn.

Vraag 3. /3

Een kinder surprise is een chocolade ei waarin een verrassing is verstoppt. De verrassing is omhuld in een cilindervormige koker. Indien we het ei voorstellen door de ellipsoïde $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$, wat is dan het maximale volume van een cilinder waarbij de as van de cilinder op de z -as ligt, die in deze ellipsoïde zit.

Antwoord 1. Voor de convergentiestraal R te berekenen berekenen we eerst $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, met $\frac{1}{L} = R$. $a_n = (-1)^n \frac{e^n}{n+1}$ dus $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{e^{n+1}}{n+2}}{(-1)^n \frac{e^n}{n+1}} \right|$. Na een beetje rekenwerk bekomen we $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -e \frac{n+1}{n+2} \right| = e$. En dus $R = 1/e$. Nu moeten we nog controleren of de randpunten $\pi + 1/e$ en $\pi - 1/e$ convergeren.

Voor $x = \pi + 1/e$ verkrijgen we $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n+1} (1/e)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$. Het criterium van Leibniz zegt dat een alternerende reeks convergeert als ze aan 2 criteria voldoet:

- $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Aangezien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ hieraan voldoet is deze dus convergent.

Voor het 2de randpunt, $x = \pi - 1/e$, verkrijgen we $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n+1} (-1/e)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$ en zien we analoog dat ook deze ook convergent is. Het convergentie interval is dus $[\pi - 1/e; \pi + 1/e]$.

Antwoord 2. Als de limiet van de partiële som van een reeks niet gelijk is aan 0 weten we dat de reeks divergeert. Dus we gaan aantonen dat

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n - \sqrt{n^2 - a_n} &\neq 0. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n - \sqrt{n^2 - a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - a_n}) * \frac{n + \sqrt{n^2 - a_n}}{n + \sqrt{n^2 - a_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 + a_n}{n + n\sqrt{1 - \frac{a_n}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{a_n}{n^2}}} \\ &= 1 * 1/2 = 1/2 \end{aligned}$$

Antwoord 3. Het volume van een cilinder is $V = \pi r^2 h$. De as van de cilinder ligt op de z -as dus z is de hoogte h van de halve cilinder (want de ellipsoïde wordt doormidden gesneden in het xy -vlak) en de straal r wordt gegeven door $x^2 + y^2$. Dus hebben we de te optimaliseren functie $f(x, y, z) = \pi(x^2 + y^2)z$ met nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$. De lagrangiaanse functie is dan $L(x, y, z, \lambda) = \pi(x^2 + y^2)z + \lambda(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2})$. Nu moeten we zoeken voor welke x, y, z, λ de gradiënt van deze functie gelijk is aan 0. Dus $2\pi xz\mathbf{i} + 2\pi yz\mathbf{j} + \pi(x^2 + y^2)\mathbf{k} + 2\lambda x\mathbf{i} + 2\lambda y\mathbf{j} + \lambda z\mathbf{k} = 0$. Dit levert ons samen met de nevenvoorwaarde volgend stelsel op:

$$\begin{cases} 2\pi xz + 2\lambda x = 0 \\ 2\pi yz + 2\lambda y = 0 \\ \pi(x^2 + y^2) + \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Dit kunnen we nog vereenvoudigen door in te zien dat op iedere hoogte z er oneindig veel koppels x en y zijn die de straal van het grondvlak beschrijven. We kiezen hier daarom $y = 0$ en $x \neq 0$ zodat $x^2 = r^2$. dan vereenvoudigd ons stelsel tot:

$$\begin{cases} x(2\pi z + 2\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ \pi(x^2 + y^2) + \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Na x weg te delen in de eerste vergelijking, de eerste vergelijking in functie van λ te zetten en $y = 0$ in te vullen in de 3de en 4de vergelijking:

$$\begin{cases} \lambda = -\pi z \\ y = 0 \\ \pi x^2 + \lambda z = 0 \\ x^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Dan kunnen we λ invullen in de 3de vergelijking en deze daarna omvormen:

$$\begin{cases} \lambda = -\pi z \\ y = 0 \\ x^2 = z^2 \\ x^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Als we dan nog x^2 invullen en terug substitueren:

$$\begin{cases} \lambda = -\pi z \\ y = 0 \\ x^2 = 2/3 \\ z^2 = 2/3 \end{cases}$$

Dan kunnen we deze waarden voor x, y en z in onze volume functie stoppen maar deze moeten we maal 2 doen aangezien we hier alleen maar het volume van de helft boven het xy -vlak hebben berekend. $V = 2 * \pi * (2/3 + 0) * \sqrt{2/3} = 4/3 * \sqrt{2/3} * \pi$