Examen Lineaire Algebra 26 januari 2017

1. Bewijs: Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire transformatie met een symmetrische matrix A. Dan is, voor elke eigenwaarde λ van L_A, de meetkundige multipliciteit $d(\lambda)$ gelijk aan de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$.

2. Neem $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ een willekeurige matrix, en $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ is de matrix A waarbij een willekeurige rij opgeteld is met een constant aantal keer een andere willekeurige rij uit A. Toon aan dat deze elementaire rij-operatie de rijruimte behoudt, dus dat $R(A) = R(B)$.

3. Waar/fout, motiveer nauwkeurig

   (a) Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een diagonaliseerbare matrix. Dan is er voor elke A een $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodat $B^3 = A$.

   (b) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaliseerbare matrices met dezelfde karakteristieke veelterm, dan zijn A en B gelijkvormig.

   (c) Zij $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ een lineaire transformatie en neem de standaardbasis $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ voor $\mathbb{R}^3$. Als we weten dat $L(e_1)\, L(e_2)$ en $L(e_3)$ niet nul zijn, dan zijn $L(e_1)\, L(e_2)$ en $L(e_3)$ lineair onafhankelijk.

4. Zij

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

   en zij U_M een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ zodat

$$U_M = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & t \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

   (a) Toon aan dat U_M een deelruimte is.

   (b) Voor welke waarden van $a \in \mathbb{R}$ zijn de kolommen in M lineair onafhankelijk als

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 1-a \\ 2 & -1 & a^2+2 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

   .

   (c) Bepaal de dimensie van U_M in functie van de parameter $a \in \mathbb{R}$ met M zoals vastgelegd in (b).

5. Zij $L : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$ een lineaire transformatie waarbij $L(1 + 2X) = 3 + 3X + 2X^2$, $L(1 + X) = 1 + X + X^2$ en $L(X^2) = -2 - 2X - X^2$ en beschouw de standaardbasis $\varepsilon = \{1, X, X^2\}$.

   (a) Motiveer waarom deze lineaire transformatie uniek is.

   (b) Bereken de matrixvoorstelling $L_\varepsilon^\varepsilon$ tegenover de standaardbasis.

   (c) Bepaal Ker(L) en Im(L).

   (d) Bereken $L(L(1 + X + X^2))$.