

# Examen Algebraïsche Structuren

(13u-17u: 27/06/2012)

## Theorie

1. Bewijs dat voor  $n$  en  $m \in \mathbb{N}_0$  relatief priem,  $\mathbb{Z}_{nm}$  isomorf is met  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ .
2. Zij  $A$  de Gramm-matrix voor  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  t.o.v. basis  $V$  en  $B$  die t.o.v. basis  $W$ . Geef en bewijs de formule voor  $B$  in functie van  $A$  en  $Id_W^V$ .

## Oefeningen

1. Zij  $p$  priem en  $G$  een Abelse groep met minstens één element met orde  $p$ . Stel  $\alpha = \# \{g \mid \text{orde}(g) = p\}$ .
  - (a) Bereken  $\alpha$  voor  $p = 3$  en  $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$ .
  - (b) Bewijs dat  $\alpha \equiv -1 \pmod{p}$  (als  $\alpha$  niet oneindig is).  
*Hint:* beschouw de afbeelding  $f : G \rightarrow G : x \mapsto x^p$ .
2. Bereken  $\left(3^{(999^{100})} + 7^{(960^{961})}\right) \pmod{225}$ .
3. Zij  $V$  een  $n$ -dimensionale vectorruimte over een veld  $K$  en  $\alpha, \beta \in V^*$ .  
Bewijs dan dat:
$$\ker \alpha \subseteq \ker \beta \Leftrightarrow \exists k \in K, \beta = k \cdot \alpha$$
  
*Hint:* ga eens na welke dimensies  $\ker \alpha$  en  $\ker \beta$  kunnen hebben.