

Examen Algebraïsche Structuren

(13u-17u: 27/06/2012)

Theorie

1. Bewijs dat voor n en m relatief priem, $\mathbb{Z}_{nm}$ isomorf is met $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.
2. Zij A de Gramm-matrix voor $\langle \cdot, \cdot \rangle$ t.o.v. basis V en B die t.o.v. basis W . Geef en bewijs de formule voor B in functie van A en Id_W^V .

Oefeningen

1. Zij p priem en G een Abelse groep met minstens één element met orde p . Stel $\alpha = \# \{g \mid \text{orde}(g) = p\}$.
 - (a) Bereken α voor $p = 3$ en $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$.
 - (b) Bewijs dat $\alpha \equiv -1 \pmod{p}$ (als α niet oneindig is).
Hint: beschouw de afbeelding $f : G \rightarrow G : x \mapsto x^p$.
2. Bereken $\left(3^{(999^{100})} + 7^{(960^{961})}\right) \pmod{225}$.
3. Zij V een n -dimensionale vectorruimte over een veld K en $\alpha, \beta \in V^*$.
Bewijs dan dat:
$$\ker \alpha \subseteq \ker \beta \Leftrightarrow \exists k \in K, \beta = k \cdot \alpha$$

Hint: ga eens na welke dimensies $\ker \alpha$ en $\ker \beta$ kunnen hebben.