

Examen Lineaire Algebra (Fysica en wiskunde)

2009-2010 - januari

1. Gegeven is een eindigdimensionale vectorruimte V , voortgebracht door $v_1, v_2 \dots v_R$. Geef en bewijs de manier waarop we dit voortbrengend deel uitdunnen tot een basis van V .
2. Gegeven is een lineaire transformatie $\mathcal{A}$ met gegeven eigenwaarde $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$. Ook de eigenvectoren $v_1, v_2 \dots v_r$ zijn gegeven met telkens de bijhorende eigenwaarde λ_i , voor $i = 1 \dots r$. Bewijs dat deze eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn. (*Hint*: gebruik inductie op r)
3. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Ook is gegeven dat $\mathcal{A}() = ()$, $\mathcal{A}() = ()$ en $Im(\mathcal{A}) = Ker(\mathcal{A})$.
 - (a) Bepaal de transformatiematrix $M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ ten opzichte van de standaardbasis $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
 - (b) Zouden er basissen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ bestaan zodat de transformatiematrix $M_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ is?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als zo'n basissen zouden bestaan, geef er. Bestaan ze niet, geef ze niet, maar argumenteer waarom ze er niet zijn.

4. a) Bepaal de formules voor $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$ in functie van $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ en $\cos(\beta)$. Bewijs deze formules aan de hand van de rotatiematrix rond het centrum in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van twee keer de standaardbasis $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.

- b) Voor een vast getal $d \in \mathbb{N}_0$ geldt de lineaire transformatie $\mathcal{A}_a : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq d} : f(x) \mapsto f(x + a)$. Bepaal de waarden van a waarvoor $\mathcal{A}_a$ diagonaliseerbaar is.
5. Gegeven is de matrix A waar $c \in \mathbb{R}$. Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren die geldt voor alle c .
6. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ waarin U een lineaire deelruimte is. W is dan weer een lineaire deelruimte van U .

$$U^{\perp_{\mathbb{R}^n}} + W = \left(W^{\perp_U}\right)^{\perp_{\mathbb{R}^n}}$$

7. Bewijs volgend eigenschapje. Gegeven is de lineaire afbeelding $f : V \rightarrow W$, waarbij V en W twee eindigdimensionale vectorruimten zijn.

Voor alle lineaire afbeeldingen $g : V \rightarrow W$ geldt dat $\text{rang}(g) \leq \text{rang}(f)$

$\Updownarrow$

f is injectief of surjectief