Merk op: om de vragen te kunnen verstaan heb je je cursus soms nodig, maar het antwoord zou je zonder cursus moeten kunnen geven.

Hoofdstuk 1: Combinatoriek

1. Bewijs formeel de productformule of het vermenigvuldigingsprincipe:

Als A en B twee eindige verzamelingen zijn dan is $\#(A \times B) = \#A \times \#B$.

Hoofdstuk 2: Complexiteit

1. Laat in detail zien dat elke polynome taal T waarvoor geldt dat $T \neq \emptyset$ en $T \neq L^*$ polynoom equivalent is met de taal A over het alfabet $\{a, b\}$ waarbij $A = \{a\}$.

2. Verklaar waarom # niet in de invoerstring van een Turingmachine toegelaten wordt. Vind je dit een goede reden ? Is het een echte beperking ?

3. Stel dat de functie P (zie definitie Turing machine) **overal** gedefiniëerd was op $Q \times \Sigma$; wat kan je nu besluiten over de TM ?

4. Laat zien dat het aantal Turingmachines met n symbolen en m toestanden eindig is.

5. Waarom is het nuttig om de complexiteit van het slechtste geval te kennen ? Geef een voorbeeld van een algoritme waarvan de complexiteit van het beste geval verschilt van de complexiteit van het slechtste geval. Geef ook een voorbeeld van een algoritme waarvan de complexiteit van het beste geval gelijk is aan de complexiteit van het slechtste geval.

6. Stel een algortime heeft een complexiteit die $O(f)$ is; argumenteer dat niet alleen de functie f, maar ook de constante factor van belang is.

7. Beschrijf en becommentariëer de structuur van de verzameling NP zoals die nu bekend is. Haal stellingen aan die laten zien hoe die structuur kan veranderen en op welke voorwaarde.

8. Bij het bepalen van de complexiteit van een aantal in elkaar geneste lussen, wordt het aantal keer dat de binnenste lus wordt uitgevoerd als bepalend beschouwd. Waarom mag dat ? Of anders uitgedrukt: onder welke voorwaarde(n) is het aantal keer dat de binnenste lus wordt uitgevoerd een goede maat voor de complexiteit. Geef een voorbeeld waarbij de voorwaarde niet voldaan is.

9. Bespreek de verschillende manieren waarop een Turingmachine een taal kan bepalen. Geef een voorbeeld van een taal die niet door een TM kan beslist worden.

10. Bespreek het verschil tussen het niet-determinisme in de definitie van een niet-deterministische Turingmachine en het niet-determinisme in een algoritme zoals dat van bijvoorbeeld of Kruskal of Prim.

11. Bespreek de definitie van de complexiteit van een niet-deterministische Turingmachine. In het bijzonder: wat vind je van

    "... de tijd die een NDTM nodig heeft om een bepaalde invoerstring x te accepteren gelijk is aan de **kortste** lengte van één van de mogelijke berekeningsrijen die x accepteert."

    Waarom staat er **kortste** en niet **langste** ?

    En waarom de uitzondering:

    "0 Indien er geen enkele string van lengte n aanvaard wordt" op pagina 63 ?

12. Bespreek het praktisch gevolg van een wiskundig bewijs dat $NP = P$ zou zijn. Zou daaruit ook volgen dat $NPC = NP$? Of $NPC = P$?

Hoofdstuk 3: Grafentheorie

1. Formuleer het bewijs van stelling 2.1.14 (Bestaan van een Euleriaanse kring) als een algoritme en bewijs de eindigheid ervan.

2. Geef antwoord op de **(waarom niet ?)** in stelling 2.2.1. (Grafentheorie - stelling over betekenis van de elementen van de n-de macht van de buurmatrix)

3. Waarom is het kunnen testen van isomorfisme van twee grafen belangrijk ? Is het belangrijker/moeilijker om isomorfisme te kunnen testen of niet-isomorfisme ?

4. Geef de algemene structuur van een correctheidsbewijs van een algoritme en geef commentaar op de samenhang van de verschillende onderdelen van het bewijs.

5. In welke zin zijn K_5 en $K_{3,3}$ de kleinste niet-vlakke grafen ?

6. Bewijs dat K_5 niet vlak is.

7. Laat zien dat het kleuren van een vlakke graaf equivalent is met het kleuren van een vlakke kaart.

8. Teken een vlakke graaf waarvan elke knoop een graad ten minste 5 heeft. Wat is het belang van het bestaan van deze graaf voor het vier-kleurenprobleem ?

9. Leg het deel van stelling 2.6.4. uit dat gaat over $\delta(v) = 5$.

10. Bewijs dat indien een graaf n knopen heeft en geen kring bevat, dan zijn de uitspraken **T is samenhangend** en **T heeft (n-1) bogen** equivalent.

11. Bewijs dat een deelboom van een boom T (zoals op pagina 101 gedefiniëerd) effectief een boom is.
12. Formuleer het bewijs van stelling 3.4.2 als een algoritme en bewijs de eindigheid ervan.
13. Laat zien of in eigenschap 3.4.4. de voorwaarde dat G **enkelvoudig** is, nodig is. Doe dit door ofwel een bewijs te geven zonder die voorwaarde of door een tegenvoorbeeld te geven.
14. Leg het niet-deterministisch karakter uit van de algoritmen voor diepte-eerst (of breedte-eerst) constructie van een opspannende boom.
15. Bewijs de eindigheid van het algoritme van Kruskal in detail.
16. Bewijs in detail dat het algoritme van Kruskal een opspannende boom levert.
17. Leg het minimax algoritme uit; illustreer het op een voorbeeld dat verschillend is van het voorbeeld in de cursus.
18. Leg de $\alpha - \beta$ snede uit; illustreer die op een voorbeeld dat verschillend is van het voorbeeld in de cursus.
19. Wat is de functie van een een evaluatiefunctie voor spelbomen ?
20. Wat is de betekenis van de tweede voorwaarde in definitie 4.1.2. van een stroming ?
21. Toon aan dat een maximale stroming in een netwerk bestaat. Maak expliciet waarop je steunt.
22. Vlak na stelling 4.2.5. staat "Merk op dat de derde laatste regel van de stelling inderdaad aantoont dat de stroming gelijk is aan de stroming die door de snede loopt." Bewijs die bewering.
23. Bewijs stelling 4.3.2: Voor een gerichte, tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waarbij $V \cap W = \emptyset$ en $E \subseteq V \times W$ geldt dat
    - Een gehele stroming F in het overeenkomstige matching netwerk, geeft een matching in G: $v \in V$ komt overeen met $w \in W$ als en slechts als $F(v, w) = 1$
    - Een maximale gehele stroming komt overeen met een maximale matching.
    - Een gehele stroming met waarde $\#V$ komt overeen met een volledige matching.
24. Gegeven een transportnetwerk G. G heeft een maximale stroming (of minimale snede). Als je G beschouwt als een niet-gerichte graaf NG, dan is het mogelijk dat op NG een aantal rijreducties kan toegepast worden, hetgeen aanleiding geeft tot een niet-gerichte graaf NG'. Stel dat je nu diezelfde rijreducties toepast op G, dan krijg je G'. Hoe verander je de capaciteit en de richting van de gewijzigde bogen om toch nog zeker dezelfde maximale stroom te krijgen ?

25. De definitie van een transportnetwerk G zegt dat G als graaf samenhangend en enkelvoudig is. Zijn beide beperkingen essentiëel bij de bestudering van de maximale stroming in G ? De definitie zegt ook dat de er geen gerichte boog mag aankomen in de bron, noch vertrekken in de put: is dat essentiëel ?

Hoofdstuk 4: Λ-calculus

1. Bespreek de overeenkomst en verschillen tussen λ-calculus en Pascal i.v.m. toekenning, herhalingsstructuren, parameterbindingsmechanisme, berekeningskracht, datastructuren ...

2. Argumenteer waarom herhalingsopdrachten in Pascal zinloos worden als de toekenning wordt verwijderd uit Pascal.

3. Waarom spreken we van een vrij of gebonden **voorkomen** van een veranderlijke in een λ-expressie eerder dan van een vrije of gebonden veranderlijke ? Geef voorbeelden die dit illustreren.

4. Definiëer het herschrijfsysteem dat bestaat uit de verzameling grafen en de volgende twee reductieregels:

   (a) Voor een knoop a met $\delta(a) = 1$, verwijder de boog en de knoop a.

   (b) Voor twee bogen (x, y) en (y, z) met $x \neq z$ en waarbij y slechts op twee bogen ligt, verwijder (x, y), (y, z) en y en voeg een boog (x, z) toe.

   Formuleer en bewijs een Church-Rosser I stelling voor dit herschrijfsysteem.

   Definiëer een reductiestrategie waarvoor een Church-Rosser II stelling geldt (je moet die ook zelf formuleren).

Hoofdstuk 5: Vastepuntstheorie

1. Geef het stuk van het bewijs van de stelling van Tarski dat gaat over het grootste vast punt. Geef bij elke overgang in detail de reden of verantwoording van die overgang.

2. Beschouw $L = Q \cap [0, 1]$ met de orderelatie $\leq$ (geërfd van R). Is $L, \leq$ een complete tralie ? Waarom (niet) ? Geef een voorbeeld van een monotone afbeelding op $L, \leq$ die niet continu is. Geef ook een voorbeeld van een continue afbeelding op $L, \leq$. (Q = rationale getallen; R = reëele getallen)

3. Wat is het belang van het bestaan van vaste-punten van monotone afbeeldingen op complete tralies ? Geef een voorbeeld in de context van de boolse buurmatrix van een niet-gerichte graaf. Werk dat voorbeeld helemaal uit.