Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat
$$A \subset f^{-1}(f(A)) \tag{1}$$
geldt voor elke $A \subset X$.

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid in (1) niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat $A = f^{-1}(f(A))$ voor elke $A \subset X$ geldt als en slechts als f injectief is.

Antwoord:

(a) Neem $x \in A$ willekeurig. Zij $y = f(x)$. Dan is $y \in f(A)$ en dus $f(x) \in f(A)$. Vanwege de definitie van invers beeld is dan $x \in f^{-1}(f(A))$. Hiermee is de inclusie (1) bewezen.

(b) Een mogelijk voorbeeld is $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$. Als nu $A = \{0\}$ dan geldt $f(A) = \{0\}$ en
$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$
Het is duidelijk dat $A \neq f^{-1}(f(A))$.

Elke andere niet-injectieve functie had je ook als voorbeeld kunnen nemen. Let er wel op dat je de verzamelingen X en Y goed vastlegt. Geef ook expliciet de verzameling A aan.

(c) We moeten een equivalentie bewijzen. Dit doen we door de twee implicaties
$$\big[\forall A \in P(X) : A = f^{-1}(f(A))\big] \;\Rightarrow\; f \text{ is injectief} \tag{2}$$
en
$$f \text{ is injectief} \;\Rightarrow\; \big[\forall A \in P(X) : A = f^{-1}(f(A))\big] \tag{3}$$
te bewijzen.

Bewijs van (2)**:** Veronderstel dat

$$\forall A \in P(X) : A = f^{-1}(f(A)). \tag{4}$$

Neem aan dat $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$. Neem $A_1 = \{x_1\}$. Dan is $A_1 \in P(X)$, zodat vanwege (4) geldt dat

$$A_1 = f^{-1}(f(A_1)). \tag{5}$$

Omdat $x_2 \neq x_1$ en $A_1 = \{x_1\}$ geldt dat $x_2 \notin A_1$. Vanwege (5) is dan

$$x_2 \notin f^{-1}(f(A_1))$$

hetgeen betekent dat

$$f(x_2) \notin f(A_1).$$

Omdat $f(A_1) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$ volgt hieruit dat

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

We hebben nu bewezen dat

$$\forall x_1, x_2 \in X : \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

zodat f injectief is.

De implicatie (2) is nu bewezen.

Bewijs van (3)**:** We nemen nu omgekeerd aan dat f injectief is. We moeten bewijzen dat

$$\forall A \in P(X) : A = f^{-1}(f(A)). \tag{6}$$

Neem $A \in P(X)$ willekeurig. We laten eerst zien dat

$$f^{-1}(f(A)) \subset A. \tag{7}$$

Neem $x \in f^{-1}(f(A))$ willekeurig. Dit betekent dat $f(x) \in f(A)$. Dan is er een $a \in A$ met $f(x) = f(a)$. Omdat f injectief is volgt hieruit dat $x = a$. Omdat $a \in A$ is dan $x \in A$. De implicatie (7) is nu bewezen.

Uit onderdeel (a) van deze vraag volgt dat $A \subset f^{-1}(f(A))$. Vanwege (7) geldt dus de gelijkheid

$$A = f^{-1}(f(A)).$$

Omdat $A \in P(X)$ willekeurig gekozen is is hiermee (6) bewezen.

De implicatie (3) is nu bewezen.

De implicaties (2) en (3) zijn nu allebei bewezen. Hiermee is onderdeel (c) van de vraag ook volledig bewezen.

Vraag 2 Zij X een oneindige verzameling. We definiëren een relatie R op de verzameling $\text{Fun}(X, \mathbb{N})$ van alle functies van X naar $\mathbb{N}$ door $(f, g) \in R$ als en slechts als

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

een eindige verzameling is. Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

Antwoord:
Let op dat het hier gaat om een relatie op $\text{Fun}(X, \mathbb{N})$. De relatie heeft dus betrekking op functies.

Om te kunnen concluderen dat R een equivalentierelatie is moeten we drie dingen bewijzen, namelijk (a) de reflexiviteit, (b) de symmetrie en (c) de transitiviteit van R.

(a) Neem $f \in \text{Fun}(X, \mathbb{N})$. Dan is zeker $f(x) = f(x)$ voor elke $x \in X$, zodat

$$\{x \in X \mid f(x) \neq f(x)\}$$

de lege verzameling is. De lege verzameling is eindig en bijgevolg geldt dat

$$(f, f) \in R.$$

Dit bewijst dat R reflexief is.

(b) Neem $f \in \text{Fun}(X, \mathbb{N})$ en $g \in \text{Fun}(X, \mathbb{N})$ en veronderstel dat $(f, g) \in R$. De verzameling

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \tag{1}$$

is dan een eindige verzameling. Dan is ook

$$\{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\}$$

een eindige verzameling, want dit is precies dezelfde verzameling als (1). Bijgevolg geldt $(g, f) \in R$. We hebben nu bewezen dat de implicatie

$$(f, g) \in R \;\Rightarrow\; (g, f) \in R$$

geldt voor elke $f \in \text{Fun}(X, \mathbb{N})$ en $g \in \text{Fun}(X, \mathbb{N})$. Dit betekent dat R symmetrisch is.

(c) Neem nu $f \in \mathrm{Fun}(X, \mathbb{N})$, $g \in \mathrm{Fun}(X, \mathbb{N})$ en $h \in \mathrm{Fun}(X, \mathbb{N})$ en veronderstel dat $(f, g) \in R$ en $(g, h) \in R$.

De verzamelingen A en B gedefinieerd door

$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \tag{2}$$

en

$$B = \{x \in X \mid g(x) \neq h(x)\} \tag{3}$$

zijn dan eindige deelverzamelingen van X. Zij

$$C = \{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\}. \tag{4}$$

We moeten laten zien dat C een eindige verzameling is en dit doen we door eerst te laten zien dat

$$C \subset A \cup B. \tag{5}$$

Neem $x \in C$ willekeurig. Vanwege de definitie (4) is dan $f(x) \neq h(x)$. Veronderstel dat x geen element is van $A \cup B$. Dan is $x \in X \setminus A$, zodat uit (2) geldt dat $f(x) = g(x)$. Ook is $x \in X \setminus B$ zodat uit (3) volgt dat $g(x) = h(x)$. Uit $f(x) = g(x)$ en $g(x) = h(x)$ volgt $f(x) = h(x)$, maar dit is in tegenspraak met $f(x) \neq h(x)$. We concluderen hieruit dat $x \in A \cup B$. Dit geldt voor elke $x \in C$ en daarom is de inclusie (5) nu bewezen.

Omdat A en B eindige verzamelingen zijn is ook de unie $A \cup B$ een eindige verzameling. Als deelverzameling van een eindige verzameling (zie (5)) is C dan ook een eindige verzameling en bijgevolg is $(f, h) \in R$.

We hebben nu bewezen dat

$$(f, g) \in R \ \wedge (g, h) \in R \ \Rightarrow \ (f, h) \in R$$

geldt voor elke $f, g, h \in \mathrm{Fun}(X, \mathbb{N})$. Dit betekent dat R transitief is.

Omdat de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is, is het een equivalentierelatie.

Vraag 3 Bewijs dat $3^{2n-1} + 1$ een veelvoud is van 4 voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Gebruik volledige inductie.

Antwoord:
In de basisstap controleren we dat de bewering juist is voor $n = 1$.
Voor $n = 1$ is $3^{2n-1} + 1 = 3^1 + 1 = 4$ en dit is inderdaad een veelvoud van 4. De bewering klopt dus voor $n = 1$.

In de inductiestap nemen we aan dat de bewering juist is voor zekere $k \in \mathbb{N}_0$ en we gaan hieruit bewijzen dat de bewering ook juist is voor $k + 1$.
We nemen dus aan dat $3^{2k-1} + 1$ een veelvoud van 4 is voor zekere $k \in \mathbb{N}_0$. Er geldt dat

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)-1} + 1 &= 3^{2k+1} + 1 = 3^2 \cdot 3^{2k-1} + 1 \\ &= 3^2 \cdot (3^{2k-1} + 1) - 3^2 + 1 = 9 \cdot (3^{2k-1} + 1) - 8. \qquad (1) \end{aligned}$$

We weten vanuit de inductiehypothese dat $3^{2k-1} + 1$ een veelvoud is van 4. Omdat -8 ook een veelvoud is van 4 is bijgevolg $9 \cdot (3^{2k-1} + 1) - 8$ een veelvoud van 4. Vanwege (1) geldt dus dat $3^{2(k+1)-1} + 1$ een veelvoud van 4 is. Hiermee is bewezen dat de bewering juist is voor $k + 1$.

De conclusie is dat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn. Vanwege het principe van volledige inductie volgt nu dat de bewering juist is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.