Tussentijdse Toets Wiskunde I
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie, Informatica,
Schakelprogramma toegepaste informatica
15-19 november 2010

Naam:
Jaar en richting:
Naam assistent:

- *Deze tussentijdse toets is bedoeld om je vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of je de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst.*
- *Je mag gebruik maken van de cursus Wiskunde I en van een rekenmachine (een grafisch toestel is toegestaan, een symbolisch niet).*
- *Geef de antwoorden duidelijk leesbaar in goede Nederlandse zinnen. Schrijf je antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen. Vermeld je naam op elk blad!*
- *Vermeld op dit blad ook de naam van je assistent (Hans Baumers, Veerle Hennebel, Eva Leenknegt, Michaël Moreels of Sven Raum).*

Succes!

Vraag 1 (Op 4 punten)

(a) Bekijk de afleiding van de wet van Snellius, bladzijde 111-112 in de cursus. Geef een kort argument waarom we op het einde mogen stellen dat $\frac{dt}{dx_1} = 0$ een minimum geeft (in plaats van een maximum of een buigpunt). Je mag aannemen dat dt/dx_1 maar één nulpunt heeft in $[0, X]$.

(b) Op de tekening op bladzijde 112 in de cursus is θ_1 kleiner dan θ_2. Waar is de lichtsnelheid het grootst, boven of onder het scheidingsvlak? Leg je antwoord kort uit.

(c) De niveaukromme gegeven door

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \frac{2y - y^2 - 1}{4} = 1$$

is een (kruis één optie aan)

■ cirkel	☐ ellips, maar geen cirkel
☐ hyperbool	☐ parabool
☐ geen van voorgaande	

Antwoord:

(a) De afgeleide van de tijdsfunctie, dt/dx_1, is in $x_1 = 0$ gelijk aan

$$\frac{1}{v_2} \frac{-2X}{\sqrt{X^2 + y_2^2}}$$

en dus negatief en analoog positief in $x_1 = X$. Deze afgeleide heeft zoals gegeven maar één nulpunt op $[0, X]$, en dus moet dt/dx_1 negatief zijn links van dat nulpunt, en positief rechts van dat nulpunt. De theorie van het tekenverloop geeft nu dat we wel degelijk een minimum vinden.

(b) De lichtsnelheid is **onder** het scheidingsvlak het grootst. De sinus is een strikt stijgende functie op $[0 \ldots \pi/2]$, zodat $\sin\theta_1$ kleiner is dan $\sin\theta_2$. Uit de wet van Snellius volgt dan dat η_1 groter is dan η_2, en dus is v_1 kleiner dan v_2.

Je kan dit ook inzien met het principe van Fermat: de afstand r_2 die het licht aflegt onder het scheidingsvlak is *groter* dan een rechte lijn van P naar Q zou geven. De afstand r_1 die het licht aflegt boven het scheidingsvlak is *kleiner* dan die rechte lijn van P naar Q zou geven. Dus moet de lichtstraal deze langere afstand r_2 afleggen tegen een hogere snelheid dan r_1.

Vraag 2 (Op 8 punten)
Beschouw de functie f met functievoorschrift

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{(x-2)(x+1)}.$$

(a) Bepaal alle asymptoten van de grafiek van f.

(b) Bereken de Taylorveelterm van graad 2 rond $x = 0$ van f.

Tip: als je partieelbreuken gebruikt moet je geen ingewikkelde afgeleiden berekenen.

(c) Wat is de afgeleide van $g(x) = \text{Bgsin}(x^3 - 2)$?

Antwoord:

(a) We bepalen het lineaire deel:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x}{(x-2)(x+1)}.$$

Bijgevolg is er een schuine asymptoot gegeven door $y = x + 1$, en twee verticale asymptoten gegeven door $x = 2$ respectievelijk $x = -1$, omdat dit nulpunten van de noemer (en niet van de teller) zijn.

(b) Splitsen we het 'echte rationale deel' van $f(x)$ in partieelbreuken, dan vinden we voor $f(x)$:

$$f(x) = x + 1 + x\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right).$$

De Taylorveelterm van graad 1 van $1/(x-2)$ is $-1/2 - x/4$, en die van $1/(x+1)$ is $1 - x$. Bijgevolg krijgen we voor de Taylorveelterm P_2 van f:

$$P_2(x) = x + 1 + x\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) - x(1-x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2.$$

(c)

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{3x^2}{\sqrt{-3 - x^6 + 4x^3}}.$$

Vraag 3 (Op 8 punten)
We hebben een ijzerdraad van 10 meter lang en willen deze in twee stukken knippen, met lengte A en $B = 10 - A$ meter. We gebruiken daarna het stuk met lengte A om een vierkant te vouwen met omtrek A.

(a) Stel dat we het tweede stuk gebruiken om een gelijkzijdige driehoek met omtrek B te vouwen. Hoe groot moeten we A kiezen om de totale oppervlakte van het vierkant en de driehoek samen zo klein mogelijk te maken?

(b) Zelfde situatie als in (a), maar nu willen we een zo *groot* mogelijke totale oppervlakte.

(c) We plooien het tweede stuk niet in een driehoek, maar in een cirkel met omtrek B. Stel dat we A willen kiezen zodat de totale oppervlakte van vierkant en cirkel samen minimaal is. Geef de functie die je moet minimaliseren om A te bepalen (je hoeft A niet te berekenen).

Antwoord:

(a) De stelling van Pythagoras leert dat als C de lengte van de zijde van een gelijkzijdige driehoek is, dat de hoogte dan $\sqrt{3}C/2$ is (ga dit zelf nog na, maak een tekening!). Omdat $C = B/3$, is de oppervlakte van de driehoek dus $\sqrt{3}B^2/36$. De oppervlakte van het vierkant is $(A/4)^2$ en bijgevolg moeten we

$$\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(10 - A)^2$$

minimaliseren. De afgeleide functie heeft als nulpunt

$$A = \frac{40\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}},$$

en de tweede afgeleide is positief, zodat we effectief een minimum vinden. Bijgevolg is $A \approx 4,34964$.

(b) De berekening in (a) leert ons dat het maximum aan de uiteinden van de functie te vinden moet zijn. Ofwel is alles vierkant ($A = 10$), dit geeft oppervlakte $(10/4)^2 = 6,25$, ofwel is alles driehoek ($A = 0$), en dit geeft oppervlakte $\sqrt{3} \cdot 100/36 \approx 4,81$. Bijgevolg moeten we $A = 10$ nemen.

(c) Als r de straal van de cirkel is, is $2\pi r = B$ de omtrek, zodat $r = B/(2\pi)$. De totale oppervlakte wordt dan

$$\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \pi r^2 = \left(\frac{A}{4}\right)^2 + \frac{(10 - A)^2}{4\pi}.$$