

Proefexamen GT458: Algebraïsche Structuren 18 april 2007, lokaal B02.08

1. Zij $GL_2(\mathbb{R}), \cdot$ de groep van inverteerbare reële 2×2 matrices. Zij $B \subset GL_2(\mathbb{R})$ de deelverzameling van inverteerbare bovendrehoeksmatrices:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid c = 0 \right\}.$$

Zij $U \subset B$ de deelverzameling van bovendrehoeksmatrices met enen op de diagonaal:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid a = d = 1, c = 0 \right\}.$$

Zij $D \subset B$ de deelverzameling van inverteerbare diagonaalmatrices.

- (a) Geef voor een willekeurige groep $G, *$ de definitie van een deelgroep. Toon vervolgens aan dat B, U en D deelgroepen zijn van $GL_2(\mathbb{R})$.
- (b) Bepaal de elementen van orde 2 in B .
- (c) Geef de definitie van een homomorfisme en van een isomorfisme van groepen. Toon vervolgens aan dat de groep U isomorf is met $\mathbb{R}, +$.
- (d) Geef de definitie van een direct product van groepen. Bewijs of weerleg vervolgens dat

$$D \simeq (\mathbb{R}_0, \cdot) \times (\mathbb{R}_0, \cdot)$$

- (e) Bewijs of weerleg dat

$$B \simeq (\mathbb{R}_0, \cdot) \times (\mathbb{R}_0, \cdot) \times (\mathbb{R}, +)$$

2. Zij X een verzameling met een rechter actie van een groep $G, \cdot$.

- (a) Geef de definitie van de *baan* xG van een element $x \in X$ onder G .

Lemma 3.6.ii vermeldt dat voor elke $x \in X$ het volgende geldt:

De equivalentieklasse van de elementen die dezelfde baan hebben als x is precies gelijk aan de baan van x zelf.

Het bewijs wordt in de cursustekst als opgave overgelaten.

- (b) Bewijs bovenstaande uitspraak. Geef hierbij duidelijk aan waar gebruikt wordt dat elk element in G een inverse heeft.
- (c) Leg uit hoe uit bovenstaande uitspraak volgt dat de banen van G een partitie vormen van X .
- (d) Beschouw de afbeelding

$$+: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : (x, n) \mapsto x + n$$

Leg uit waarom je deze afbeelding kunt beschouwen als een (rechter) actie van $\mathbb{N}, +$ op $\mathbb{R}^+$ (hoewel $\mathbb{N}, +$ geen groep is). Definieer wat een ‘baan’ $x + \mathbb{N}$ onder deze actie zou moeten zijn, en ga na of de banen onder $\mathbb{N}$ in dit geval ook een partitie van $\mathbb{R}^+$ geven.

Neem nu aan dat X en G eindig zijn en de actie van G vrij is. We weten dan dat elke baan precies $\#G$ elementen heeft.

- (e) Formuleer het in de cursus gevonden verband tussen het aantal elementen van X , het aantal elementen van G en het aantal banen van G in X . Leg uit hoe we dit verband hebben afgeleid uit bovenstaande resultaten en feiten.

3. Los op in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

- (a) $5x = \bar{3}$
- (b) $x^{23} = \bar{6}$

4. (a) Los op in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$15x + 24y = 3$$

- (b) Los op in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x \bmod 3 = 2 \\ x \bmod 8 = 7 \end{cases}$$