Examen Numerieke simulatie van differentiaalvergelijkingen

22 januari 2021

Vraag 1

Beschouw de volgende 3 methoden voor het beginwaardeprobleem $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ met $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$:

- **Methode 1:**

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- **Methode 2:**

$$\boldsymbol{y}^{n+3} - \frac{18}{11}\boldsymbol{y}^{n+2} + \frac{9}{11}\boldsymbol{y}^{n+1} + \frac{2}{11}\boldsymbol{y}^{n} = \frac{6}{11}h\boldsymbol{f}(t^{n+3}, \boldsymbol{y}^{n+3}).$$

- **Methode 3:**

$$\boldsymbol{y}^{n+2} = \boldsymbol{y}^{n+1} + h\left(\frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n+2}, \boldsymbol{y}^{n+2}) + \frac{2}{3}\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{n+1}) - \frac{1}{12}\boldsymbol{f}(t^{n}, \boldsymbol{y}^{n})\right).$$

In Figuur 1 wordt de absolute fout van elke methode getoond voor de scalaire lineare testvergelijking $y' = y$, op tijdstip $t = 1$, als een functie van de stapgrootte h. Op Figuur 2 staan 3 stabiliteitsgebieden. Figuur 3 toont tevens een numerieke simulatie voor de vergelijking

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = -y_1, \tag{1}$$

met beginvoorwaarden $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 0$, waarbij de oplossing wordt berekend met de drie bovenstaande methodes en stapgrootte $h = 2.5$. De lijnen in Figuur 1 en 3 komen overeen, met andere woorden, de blauwe lijn komt met dezelfde methode overeen in beide figuren etc.

<u>Deel 1</u> (/1,5)

a) Schrijf de expliciete vergelijking van methode 1 uit.

b) In één van de methodes staat een typfout. In welke methode is dit het geval en waarom weet je dat? (het is niet voldoende om te zeggen dat de formule anders staat in de cursus) Vanaf nu werken we met de juiste formules.

c) Beschrijf en classificeer elke methode zo specifiek mogelijk. Wat is de orde van iedere methode?

Deel 2 (/2,5)

a) Welke lijnen uit Figuur 1 en Figuur 3 komen overeen met welke methode? Welke stabiliteitsregio komt overeen met welke methode? Leid uit deze figuren en je theoretische kennis van de methodes het gedrag af van de verschillende methodes.

b) Beschouw even de verschillende mogelijkheden voor het gedrag voor een stelsel van differentiaalvergelijkingen en de bijhorende eigenschappen die we na tijdsdiscretatie willen behouden. Hebben we in onze beperkte catalogus van drie methodes een methode beschikbaar voor alle mogelijke situaties? Zo ja, leg uit. Zo nee, welk soort methode missen we nog?

Deel 3 (/3)

a) Beschouw nu een stelsel van differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$y_k' = \frac{1}{\Delta x^2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + u_k(1 - u_k), \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Welke van de bovenstaande tijdsdiscretisatiemethodes zou je voorstellen om dit probleem op te lossen? Waarom? Indien je twijfelt, geef je redenering en de stappen die je zou ondernemen om te beslissen welke methode het meest geschikt is.

b) Indien je een impliciete methode kiest voor het probleem uit a): hoe zou je de niet-lineaire stelsels oplossen in iedere stap? (denk aan iteratieschema, startwaarde en stopcriterium)

c) Hoe zou je de lineaire stelsels die je in iedere stap bekomt oplossen?

Vraag 2

Beschouw de lineaire advectievergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

met $a \in \mathbb{R}$.

(/0,5) a) Teken de bijhorende karakteristieken. Wat zijn deze?

(/2) b) Veel discretisatiemethodes zijn gebaseerd op interpolatie. Leg deze eigenschap uit en toon dit aan voor de upwind en de Lax-Wendroff methodes.

(/2) c) Gebruik deze eigenschap om het upwind schema van tweede orde af te leiden.

(/2,5) d) Bereken de stabiliteitsvoorwaarde van dit schema en interpreteer deze voorwaarde. Vergelijk met de CFL-conditie.

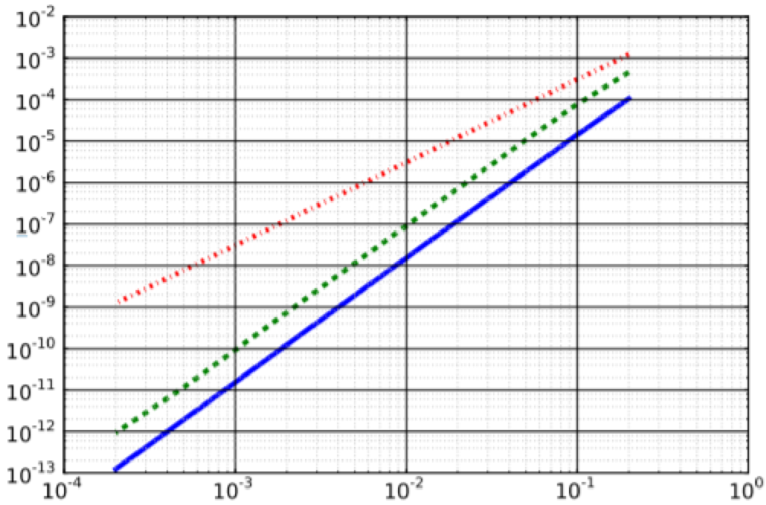
Vraag 3

(/1) a) Bespreek het verschil in interpretatie van de oplossing op een grid tussen eindige differentiemethodes en eindige volumemethodes. Voor welke problemen zijn eindige volumemethodes het meest geschikt?

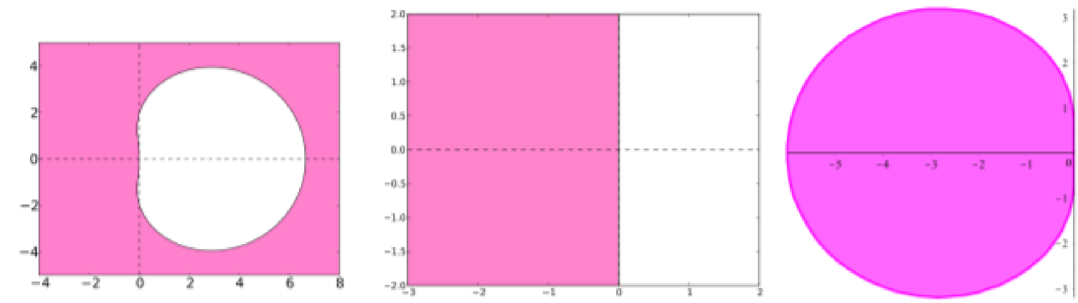
(/1) b) Waarom schakelen we bij de eindige-elementenmethode over naar zwakke vorm? (wat bereiken we hier mee wat we anders niet zouden kunnen doen?)

(/2) c) Beschouw een Newtoniaans stelsel waarbij de deeltjes enkel veranderen in positie, niet in snelheid. Welke methode zou je gebruiken om dit probleem op te lossen? Waarom?

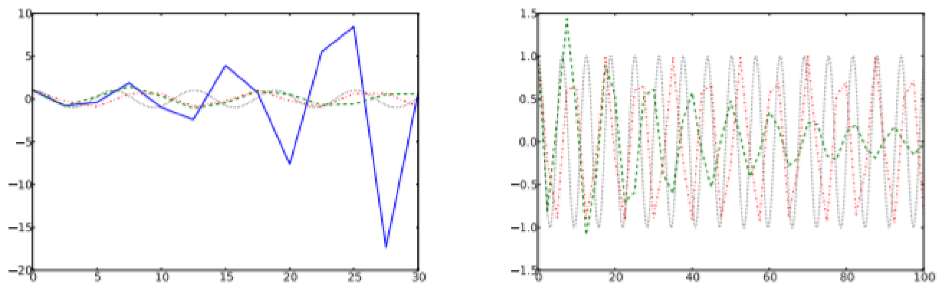
(/2) d) Wat is het verschil in foutenschatting tussen Runge-Kuttamethodes en lineare multistapmethodes? Waarom is er een verschil?



Figuur 1: Absolute fout als een functie van de stapgrootte voor 3 tijdsdiscretisatiemethodes.



Figuur 2: Lineaire stabiliteitsdomeinen van 3 tijdsdiscretisatiemethodes. Het stabiele gebied is roze gekleurd.



Figuur 3: Oplossing van differentiaalvergelijking (1) met 3 tijdsdiscretisatiemethodes, waarbij een stapgrootte $\Delta t = 2.5$ gebruikt werd. Links: integratie tot $t = 30$; rechts: integratie tot $t = 100$. De exacte oplossing is de zwarte stippellijn. De blauwe volle lijn staat niet op de rechterfiguur.