

Metrische ruimten en continuïteit

Oplossingen van enkele oefeningen

1 Metrische ruimten

- (1.5) Zij (S, d) een metrische ruimte en definieer $d' : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ op S door $d'(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$ voor alle $x, y \in S$. Bewijs dat d' een begrensde metriek is op de verzameling S .

Oplossing. Kies $x, y \in V$ willekeurig. Dan is $d'(x, y) = d(x, y)$ of $d'(x, y) = 1$, en omdat $d(x, y) \geq 0$ is $d'(x, y) \geq 0$. Bovendien volgt uit $d'(x, y) = 0$ dat $d(x, y) = 0$ en dus $x = y$. Verder zien we dat $d'(x, y) = \min \{1, d(x, y)\} = \min \{1, d(y, x)\} = d'(y, x)$.

We bewijzen nu nog dat d' aan de driehoeksongelijkheid voldoet. Kies $x, y, z \in V$ willekeurig, dan geldt er $d'(x, y) = \min \{1, d(y, x)\} \leq 1$. Als nu $d(x, z) \geq 1$ of $d(z, y) \geq 1$ dan is $d'(x, z) = 1$ of $d'(z, y) = 1$, en dan is de ongelijkheid $d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y)$ triviaal. We veronderstellen dus dat $d(x, z) < 1$ en $d(z, y) < 1$. Er geldt dan dat

$$d'(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d'(x, z) + d'(z, y).$$

In alle gevallen is er dus aan de driehoeksongelijkheid voldaan. Bijgevolg is d' inderdaad een metriek op S , en het is triviaal dat d' een begrensde metriek is. ■

2 Convergentie in metrische ruimten

- (2.3) Geef een voorbeeld van een begrensde rij in een metrische ruimte (V, d) die geen convergente deelrij heeft. Is dit nog mogelijk als (V, d) volledig is?

Oplossing. Bekijk $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ met de gewone metriek. Zij $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ een rij zodat $q_n \rightarrow \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$. Dan is q_n een Cauchyrij in $\mathbb{Q}$ en in $\mathbb{R}$. Elke deelrij convergeert naar $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$. Uit de uniciteit van de limiet volgt dan dat geen enkele deelrij van (q_n) convergeert in $\mathbb{Q}$.

Als we $V = \mathbb{N}$ bekijken met de discrete metriek, dan is (V, d) volledig (zie opgave 2.7). Als we nu $x_n = n$ kiezen dan is (x_n) een begrensde rij die geen enkele convergente deelrij heeft. ■

- (2.5) Zij (V, d) een metrische ruimte. Zij (x_n) een Cauchyrij in V die een convergente deelrij heeft. Bewijs dat (x_n) een convergente rij is.

Oplossing. We weten dat er een strikt stijgende functie $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bestaat waarvoor geldt dat de deelrij $(x_{\varphi(n)})$ convergeert. Zij $x \in V$ de limiet van deze deelrij en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat (x_n) een Cauchyrij is bestaat er een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodat $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ voor $m, n \geq n_1$. Aangezien $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ bestaat er een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon/2$ als $n \geq n_2$. Definieer nu $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$. Voor $n \geq n_0$ geldt er dan dat

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

en bijgevolg geldt er inderdaad dat $x_n \rightarrow x$. ■

- (2.6) Zij (V, d) een metrische ruimte. Veronderstel dat (x_n) een rij is in V zodat elk deelrij van (x_n) een convergente deelrij heeft. Volgt daaruit dat (x_n) zelf een convergente rij is?

Oplossing. De rij (x_n) is zelf niet noodzakelijk convergent. Als we bijvoorbeeld $x_n = (-1)^n$ nemen, dan is er aan de voorwaarde uit de opgave voldaan, maar (x_n) convergeert niet. ■

- (2.7) Beschouw een verzameling V met de discrete metriek d . Beschrijf de convergente rijen en de Cauchyrijen in (V, d) , en laat zien dat (V, d) een volledige metrische ruimte is.

Oplossing. Zij (x_n) een convergente rij in (V, d) , met limiet x . Kies $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Er moet een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaan zodat $d(x_n, x) < \varepsilon$ voor $n \geq n_0$, dus moet $x_n = x$ voor $n \geq n_0$. De convergente rijen zijn dus precies de rijen die vanaf een bepaalde term constant zijn.

Zij (x_n) nu een Cauchyrij en kies opnieuw $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Er bestaat een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ voor alle $m, n \geq n_0$. Bijgevolg geldt er dat $x_m = x_n$ voor alle $m, n \geq n_0$, dus ook de Cauchyrijen zijn de rijen die vanaf een bepaalde term constant zijn. Alle Cauchyrijen in (V, d) zijn dus convergent, en bijgevolg is (V, d) een volledige metrische ruimte. ■

- (2.8) Toon aan dat de voorwaarde $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ voor $x, y \in V$ met $x \neq y$ (in Stelling 2.5) niet voldoende is voor het bestaan van een vast punt.

Oplossing. We beschouwen $V = [1, +\infty[$ met de gewone metriek, en $T : V \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Het is duidelijk dat T geen vaste punten heeft. Verder geldt er dat

$$|T(x) - T(y)| = \left| \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(y + \frac{1}{y} \right) \right| = |x - y| \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| < |x - y|.$$

Immers, $0 \leq 1 - \frac{1}{xy} < 1$ omdat $xy \geq 1$. Dit is dus een geschikt tegenvoorbeeld. ■

3 Open en gesloten verzamelingen

- (3.2) Bekijk $\mathbb{R}^p$ met de gewone metriek en zij $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $A \neq \emptyset$. Bewijs dat A open is als en slechts als er voor elke $a \in A$ een $\delta > 0$ bestaat zodat uit $x \in \mathbb{R}^p$ en $|x_j - a_j| < \delta$ ($\forall j$) volgt dat $x \in A$.

Oplossing. Veronderstel eerst dat A open is en zij $a \in A$. Per definitie bestaat er een $\delta' > 0$ zodat uit $x \in \mathbb{R}^p$ en $\|x - a\| < \delta'$ volgt dat $x \in A$. Kies $\delta = \delta' / \sqrt{p}$, dan volgt uit $|x_j - a_j| < \delta$ voor alle $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ dat $\|x - a\| < \sqrt{p} \cdot \delta = \delta'$, zodat $x \in A$.

Stel nu dat voor elke $a \in A$ een $\delta > 0$ bestaat zodat uit $x \in \mathbb{R}^p$ en $|x_j - a_j| < \delta$ (voor alle j) volgt dat $x \in A$. Kies $a \in A$ willekeurig en kies een dergelijke $\delta > 0$. Uit $\|x - a\| < \delta$ volgt dan natuurlijk dat $|x_j - a_j| < \delta$ voor alle j , dus $x \in A$. Bijgevolg is A open. ■

- (3.3) Beschouw $\mathbb{R}^p$ met de gewone metriek en zij $U \subseteq \mathbb{R}^p$ open. Neem $v \in \mathbb{R}^p$ en $t \in \mathbb{R}_0$. Bewijs dan dat de verzamelingen $U_v = \{x + v \mid x \in U\}$ en $tU = \{tx \mid x \in U\}$ eveneens open zijn.

Oplossing. Kies $x \in U_v$ willekeurig, dan is $x = u + v$ met $u \in U$. Er bestaat een $\delta > 0$ zodat uit $y \in \mathbb{R}^p$ en $\|y - u\| < \delta$ volgt dat $y \in U$. Als nu voor een $z \in \mathbb{R}^p$ geldt dat $\|z - x\| < \delta$ dan moet $\|(z - v) - u\| < \delta$, dus $z - v \in U$. Bijgevolg geldt er dat $z \in U_v$. Daaruit volgt dat U_v open is. Op analoge wijze bewijzen we dat tU open is. ■

(3.4) Voor alle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definiëren we $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Veronderstel dat A open is. Is $A + B$ noodzakelijk open?

(b) Veronderstel dat A gesloten is. Is $A + B$ noodzakelijk gesloten?

Oplossing. De eerste uitspraak is correct. Immers, de vorige opgave geeft dat $A + \{b\}$ open is voor elke $b \in B$, en bijgevolg is ook $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + \{b\})$ open, als unie van open verzamelingen. We kunnen deze uitspraak ook rechtstreeks met de definitie bewijzen. De tweede uitspraak is fout. Als $A = \{0\}$ en $B =]0, 1[$ dan is $A + B =]0, 1[$ nog steeds open. ■

(3.6) Bekijk $\mathbb{R}$ met de gewone topologie. Zijn $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gesloten verzamelingen zodat $A \cap B = \emptyset$. Zijn (a_n) en (b_n) rijen in A en B zodat $|a_n - b_n| \rightarrow 0$. Bewijs dat A en B onbegrensd zijn.

Oplossing. Veronderstel dat A begrensd is. De rij (a_n) is dan een begrensde rij die, volgens de stelling van Bolzano-Weierstrass, een convergente deelrij $(a_{\varphi(n)})$ heeft. Als L de limiet van deze deelrij is, dan moet $L \in A$, want A is gesloten. Omdat $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ geldt er dan ook dat $|a_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)}| \rightarrow 0$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en kies $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $|b_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}| < \varepsilon/2$ en ook $|a_{\varphi(n)} - L| < \varepsilon/2$ voor $n \geq n_0$. Volgens de driehoeksongelijkheid is dan $|b_{\varphi(n)} - L| < \varepsilon$ voor $n \geq n_0$, dus is $b_{\varphi(n)} \rightarrow L$. Omdat B gesloten is en omdat $(b_{\varphi(n)})$ een convergente rij is in B met limiet L , geldt er dat $L \in B$. Bijgevolg is $A \cap B \neq \emptyset$, en dat is een contradictie. ■

(3.8) Zij (V, d) een metrische ruimte en $A, B \subset V$. Veronderstel dat A open is en dat B gesloten is. Toon aan dat $A \setminus B$ open is en dat $B \setminus A$ gesloten is.

Oplossing. Omdat $A \setminus B = A \cap B^c$ is $A \setminus B$ open, want de doorsnede van eindig veel open verzamelingen is weer open. Omdat $B \setminus A = B \cap A^c$ is $B \setminus A$ gesloten. ■

(3.9) Zij (V, d) een volledige metrische ruimte en zij $A \subseteq V$. Door d te beperken tot A wordt (A, d) een metrische ruimte. Bewijs dat (A, d) volledig is als en slechts als A gesloten is.

Oplossing. Veronderstel eerst dat A gesloten is. Zij (x_n) een Cauchyrij in A . Dan is (x_n) ook een Cauchyrij in de volledige metrische ruimte (V, d) , dus deze rij is convergent, of nog, $x_n \rightarrow x$ voor een zekere $x \in V$. Omdat A gesloten is geldt er dan dat $x \in A$, dus de rij (x_n) convergeert in (A, d) . Daaruit volgt dan dat (A, d) volledig is.

Stel nu dat (A, d) volledig is. Zij (x_n) een rij die convergeert in (V, d) zodat $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zij x de limiet van de rij. De rij (x_n) is een Cauchyrij in (A, d) , en omdat (A, d) volledig is, heeft de rij een limiet $x' \in A$. Wegens uniciteit van de limiet geldt er dan dat $x = x' \in A$. De limiet van elke convergente rij in A behoort dus tot A , en bijgevolg is A gesloten in V . ■

(3.12) Zij $a \in \mathbb{R}^p$. We beschouwen $\mathbb{R}^p$ met de gewone metriek. Definieer

$$A = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| \geq 1\} \quad \text{en} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| = 1\}.$$

Bewijs dat A open is en dat B en C gesloten zijn. Bewijs dat

$$\overset{\circ}{A} = A, \quad \overline{A} = B, \quad \overset{\circ}{B} = A, \quad \overline{B} = B, \quad \overset{\circ}{C} = \emptyset \quad \text{en} \quad \overline{C} = C.$$

Welke gelijkheden kunnen veralgemeend worden naar willekeurige metrische ruimten?

Oplossing. Het is duidelijk dat $A = B(a, 1)$ open is en dat $B = \overline{B}(a, 1)$ gesloten is. Daaruit volgt dat A^c gesloten is, dus $C = A^c \cap B$ is ook gesloten. De gelijkheden $\overset{\circ}{A} = A$, $\overline{B} = \overset{\circ}{B}$ en $\overline{C} = C$ zijn dan triviaal. Deze gelijkheden gelden natuurlijk ook in willekeurige metrische ruimten, als $A = \{x \in V \mid d(x, a) < 1\}$ etcetera. De andere gelijkheden gelden in $\mathbb{R}^p$ en kunnen niet veralgemeend worden naar willekeurige metrische ruimten: een tegenvoorbeeld wordt gegeven door $\mathbb{N}$ met de discrete metriek. In $\mathbb{R}^p$ is $\overline{A} = B$. Immers, B is een gesloten verzameling die A omvat, dus $\overline{A} \subseteq B$. Er geldt ook dat $B \subseteq \overline{A}$ omdat elke $b \in B$ de limiet is van een convergente rij in A . Kies bijvoorbeeld de rij $b_n = a + (1 - \frac{1}{n})(b - a)$, dan is $b_n \rightarrow b$ en $b_n \in A$ voor elke n . Bijgevolg is $\overline{A} = B$. Om te bewijzen dat $\overset{\circ}{B} = A$ merken we op dat $A \subseteq \overset{\circ}{B}$, aangezien A een open deelverzameling is van B . Anderzijds geldt er ook dat $\overset{\circ}{B} \subseteq A$. Immers, als $x \in \overset{\circ}{B}$ en $x \notin A$, dan is $\|x - a\| = 1$, maar dan geldt voor elke $\delta > 0$ dat $B(x, \delta) \not\subseteq \overset{\circ}{B}$. Bijgevolg is $x \in A$ en dus $\overset{\circ}{B} \subseteq A$, zodat $\overset{\circ}{B} = A$. Tenslotte is het duidelijk dat $\overset{\circ}{C} = \emptyset$. Immers, als $c \in C$ dan is $B(c, \delta) \not\subseteq C$ voor elke $\delta > 0$: $c + \frac{\delta}{2}(c - a) \in B(c, \delta)$ maar $c + \frac{\delta}{2}(c - a) \notin C$. ■

- (3.13) *We beschouwen $\mathbb{R}$ met de gewone topologie. Zoek dan een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ zodanig dat A , $\overline{\overset{\circ}{A}}$ en $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ drie verschillende verzamelingen zijn.*

Oplossing. Als we $A = [0, 1[$ kiezen, dan geldt er dat $\overline{\overset{\circ}{A}} = [0, 1]$ en $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} =]0, 1[$. ■

- (3.15) *Beschouw $\mathbb{R}$ met de gewone metriek, en veronderstel dat A een niet-lege, naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is. Bewijs dat $\sup A \notin \overset{\circ}{A}$.*

Oplossing. Veronderstel dat $M = \sup A \in \overset{\circ}{A}$. Er bestaat dan een $\delta > 0$ zodat $B(M, \delta) \subseteq A$. Bijgevolg moet $M + \delta/2 \in A$, maar dat is een contradictie omdat $M + \delta/2 > M = \sup A$. ■

- (3.16) *Zij (V, d) een metrische ruimte en zij $A \subseteq V$. Bewijs dat $(A^c)^\circ = \overline{A}^c$.*

Oplossing. Merk op dat $A \subseteq \overline{A}$, dus $A^c \supseteq \overline{A}^c$. Omdat $\overline{A}$ gesloten is, is $\overline{A}^c$ open. Bijgevolg geldt er dat $\overline{A}^c \subseteq (A^c)^\circ$. Er geldt ook dat $(A^c)^\circ \subseteq A^c$, dus $((A^c)^\circ)^c \supseteq A$. Aangezien $(A^c)^\circ$ (per definitie) open is, geldt er dat $((A^c)^\circ)^c$ gesloten is. Bijgevolg hebben we dat $((A^c)^\circ)^c \supseteq \overline{A}$, zodat $(A^c)^\circ \subseteq \overline{A}^c$. Daaruit volgt dan natuurlijk het resultaat. ■

- (3.19) *Zij (V, d) een metrische ruimte en $A, B \subseteq V$. Bewijs dat $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ en $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Bewijs verder dat $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ en dat $(A \cup B)^\circ \supseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.*

Oplossing. We bewijzen eerst dat $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Kies $x \in \overline{A \cup B}$ willekeurig. Veronderstel (zonder verlies van de algemeenheid) dat $x \in \overline{A}$. Er bestaat een rij (x_n) in A zodat $x_n \rightarrow x$. Dan is (x_n) ook een rij in $A \cup B$, dus x , de limiet van deze rij, behoort tot de sluiting $\overline{A \cup B}$. Bijgevolg is $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Kies nu $y \in \overline{A} \cup \overline{B}$ willekeurig en zij (y_n) een rij in $A \cup B$ zodat $y_n \rightarrow y$. Schrap nu alle termen van de rij die tot $A \setminus B$ behoren. De termen die overblijven zijn allemaal elementen van B . Als dit er oneindig veel zijn dan hebben we een deelrij van (y_n) in B gevonden die nog steeds naar y convergeert, dus $y \in \overline{B}$. Als dit er slechts eindig veel zijn hebben we oneindig veel termen uit A geschrapt. Met al deze termen kunnen we dan een deelrij van (y_n) in A construeren die naar y convergeert. In dat geval is dus $y \in \overline{A}$. In alle gevallen geldt dus dat $y \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Bijgevolg is $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, en daarmee zijn we klaar.

We bewijzen nu dat $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Merk op dat $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq A \cap B$. Omdat $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ open is (als doorsnede van twee open verzamelingen) is dan $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq (A \cap B)^\circ$. Kies nu $x \in (A \cap B)^\circ$, dan bestaat er een $\delta > 0$ zodat $B(x, \delta) \subseteq (A \cap B)^\circ$. Bijgevolg geldt er dat $B(x, \delta) \subseteq A \cap B$. Omdat $B(x, \delta) \subseteq A$ is $B(x, \delta) \subseteq \mathring{A}$. Analoog vinden we dat $B(x, \delta) \subseteq \mathring{B}$. Natuurlijk geldt er dan dat $x \in \mathring{A}$ en $x \in \mathring{B}$, dus $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$ en $\mathring{A} \cap \mathring{B} \supseteq (A \cap B)^\circ$. Daaruit volgt het resultaat.

We bewijzen nu dat $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Kies $x \in \overline{A \cap B}$ willekeurig, dan bestaat er een convergente rij (x_n) in $A \cap B$ zodat $x_n \rightarrow x$. De rij (x_n) is natuurlijk een convergente rij in A , dus $x \in \overline{A}$, en ook in B , dus $x \in \overline{B}$. Bijgevolg is $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, dus $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Tenslotte bewijzen we dat $(A \cup B)^\circ \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Kies $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$ willekeurig en stel dat $x \in \mathring{A}$. Er bestaat dan een $\delta > 0$ zodat $B(x, \delta) \subseteq A \subseteq A \cup B$. Bijgevolg is $x \in (A \cup B)^\circ$, dus $(A \cup B)^\circ \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$. De gelijkheid $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ geldt zeker niet altijd. Beschouw bijvoorbeeld $\mathbb{R}$ met de gewone metriek, en neem $A = [0, 1[$ en $B =]1, 2]$. Dan is $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ en $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Ook de gelijkheid $(A \cup B)^\circ = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ geldt niet. Als $A = [0, 1]$ en $B = [1, 2]$ dan geldt er $(A \cup B)^\circ =]0, 2[$ en $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0, 2[\setminus \{1\}$. Deze gelijkheden gelden echter wel altijd in $\mathbb{N}$ met de discrete metriek. Daar is elke verzameling namelijk zowel open als gesloten. ■

- (3.22) We bekijken $\mathbb{R}^p$ met de gewone metriek. Definieer nu $\mathbb{Q}^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_j \in \mathbb{Q} \text{ voor elke } j\}$. Toon aan dat $\mathbb{Q}^p$ dicht is in $\mathbb{R}^p$.

Oplossing. Kies $x \in \mathbb{R}^p$ willekeurig. Omdat $\mathbb{Q}$ dicht is in $\mathbb{R}$ bestaat er voor elke $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ een rij (x_{jn}) in $\mathbb{Q}$ zodat $x_{jn} \rightarrow x_j$. Dan geldt er dat $(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{pn}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_p) = x$. We zien dus dat $\overline{\mathbb{Q}^p} = \mathbb{R}^p$, of nog, $\mathbb{Q}^p$ is dicht in $\mathbb{R}^p$. ■

4 Compacte en samenhangende verzamelingen

- (4.3) Bekijk $\mathbb{R}^p$ met de gewone metriek. Beschouw een convergente rij (x_n) in $\mathbb{R}^p$. Noteer $\lim x_n = x$. Bewijs dat $\{x, x_1, x_2, \dots\}$ compact is. Geldt dat ook voor $\{x_1, x_2, \dots\}$?

Oplossing. Zij $\mathcal{F}$ een willekeurige open overdekking van $\{x, x_1, x_2, \dots\}$. We weten dat er een open verzameling $V \in \mathcal{F}$ bestaat zodat $x \in V$. Omdat V open is bestaat er dan een $\delta > 0$ zodat $B(x, \delta) \subseteq V$. Omdat $x_n \rightarrow x$ bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $d(x_n, x) < \delta$ voor $n \geq n_0$. Voor elke j met $1 \leq j \leq n_0 - 1$ moet er een open verzameling $V_j \in \mathcal{F}$ bestaan zodat $x_j \in V_j$. Het is nu duidelijk dat $\{V, V_1, V_2, \dots, V_{n_0-1}\}$ de gezochte eindige deeloeverdekking is. De uitspraak geldt niet noodzakelijk voor de verzameling $\{x_1, x_2, \dots\}$. Neem bijvoorbeeld eens $x_n = 1/n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Het is duidelijk dat $\mathcal{F} = \{B(1, 1 - 1/n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ een open overdekking van $\{x_1, x_2, \dots\}$ is die geen eindige deeloeverdekking heeft. ■

- (4.4) Geef een voorbeeld van een gesloten en begrensde verzameling die niet compact is.

Oplossing. Beschouw $\mathbb{N}$ met de discrete metriek. Dan is $\mathbb{N}$ zeker begrensd en ook gesloten, want in deze metrische ruimte zijn de convergente rijen precies de rijen die vanaf een bepaalde term constant zijn. Met deze metriek is $\mathbb{N}$ echter niet compact: beschouw bijvoorbeeld de open overdekking $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(n, \frac{1}{2})$ van $\mathbb{N}$. Er bestaat duidelijk geen eindige deeloeverdekking. ■

(4.6) Zij (V, d) een metrische ruimte en zij $S \subseteq V$ eindig. Bewijs dat S compact is.

Oplossing. Stel $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ en zij $\mathcal{F}$ een open overdekking van S . Voor elke j bestaat er een $F_j \in \mathcal{F}$ zodat $a_j \in F_j$. Dan is $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ een eindige deelloverdekking. ■

(4.7) Bewijs dat equivalente metrieken dezelfde compacte verzamelingen bepalen.

Oplossing. Compacte verzamelingen worden volledig gekarakteriseerd door open verzamelingen (open overdekkingen), en equivalente metrieken bepalen dezelfde open verzamelingen. ■

(4.8) Bekijk $\mathbb{R}$ met de gewone metriek d_1 en de metriek d_2 gedefinieerd door

$$d_2(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Bewijs dat d_1 en d_2 dezelfde compacte verzamelingen bepalen.

Oplossing. De metrieken d_1 en d_2 zijn niet equivalent, maar deze metrieken bepalen wel dezelfde open verzamelingen. Immers, zij $A \subseteq \mathbb{R}$ open in $(\mathbb{R}, d_1)$ en kies $a \in A$ willekeurig. Er bestaat dan een $\delta > 0$ zodat uit $x \in \mathbb{R}$ en $d_1(x, a) < \delta$ volgt dat $x \in A$. Dan volgt uit $x \in \mathbb{R}$ en $d_2(x, a) < \frac{\delta}{\delta+1}$ dat $x \in A$, en bijgevolg is A open in $(\mathbb{R}, d_1)$. Stel nu dat A open is in $(\mathbb{R}, d_2)$ en kies $\delta > 0$, met $\delta < 1$, zodat uit $x \in \mathbb{R}$ en $d_2(x, a) < \delta$ volgt dat $x \in A$. Dan volgt uit $x \in \mathbb{R}$ en $d_1(x, a) < \frac{\delta}{1-\delta}$ dat $x \in A$, dus A is open in $(\mathbb{R}, d_1)$. Daarmee zijn we klaar. ■

(4.9) Welke uitspraken zijn correct? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) De sluiting van een niet-samenhangende verzameling is niet samenhangend.

(b) Het inwendige van een niet-samenhangende verzameling is niet samenhangend.

(c) De sluiting van een samenhangende verzameling is samenhangend.

(d) Het inwendige van een samenhangende verzameling is samenhangend.

Oplossing. De eerste uitspraak is fout, want $\mathbb{R}_0$ is niet samenhangend in $\mathbb{R}$ met de gewone metriek, maar $\overline{\mathbb{R}_0} = \mathbb{R}$ wel. Ook de tweede uitspraak is fout, want $V = [0, 1] \cup \{2\}$ is niet samenhangend (opnieuw in $\mathbb{R}$, met de gewone metriek) en $\overset{\circ}{V} =]0, 1[$ wel.

De derde uitspraak is juist. Zij (V, d) een metrische ruimte en zij $E \subseteq V$ samenhangend. Stel dat $\overline{E}$ niet samenhangend is, dan is $\overline{E} = X \cup Y$ met X, Y niet leeg en $X \cap Y = \overline{X} \cap Y = \emptyset$. Er geldt dat $E = (E \cap X) \cup (E \cap Y)$. Nu is $(\overline{E \cap X}) \cap (E \cap Y) \subseteq (\overline{E} \cap \overline{X}) \cap (E \cap Y) = E \cap \overline{X} \cap Y = \emptyset$, en ook $(E \cap X) \cap \overline{(E \cap Y)} = \emptyset$. Omdat E samenhangend is moet dus $E \cap X = \emptyset$ of $E \cap Y = \emptyset$. Als $E \cap X = \emptyset$, dan moet $E \subseteq Y$, dus $\overline{E} \subseteq \overline{Y}$ en $\overline{E} \cap X \subseteq \overline{Y} \cap X = \emptyset$, contradictie.

De vierde uitspraak is fout. Immers, $E = \overline{B}((1, 0), 1) \cup \overline{B}((-1, 0), 1)$ is samenhangend in $\mathbb{R}^2$ met de gewone metriek. Dat volgt uit Propositie 4.23, want $\overline{B}((1, 0), 1)$ en $\overline{B}((-1, 0), 1)$ zijn convex (en dus samenhangend) en $\overline{B}((1, 0), 1) \cap \overline{B}((-1, 0), 1)$ is niet leeg. Het is echter niet moeilijk om in te zien dat $\overset{\circ}{E} = B((1, 0), 1) \cup B((-1, 0), 1)$ niet samenhangend is. ■

(4.10) Beschouw $\mathbb{R}$ met de gewone metriek en bekijk het halfopen interval $]0, 1[$. Zoek een niet-triviale deelverzameling A van $]0, 1[$ die open is in $]0, 1[$, maar die niet open is in $\mathbb{R}$. Kan je hetzelfde fenomeen krijgen als je het open interval $]0, 1[$ beschouwt?

Oplossing. Een eenvoudig voorbeeld van een dergelijke deelverzameling is $]\frac{1}{2}, 1]$. Dit fenomeen kan zich echter niet voordoen als we met $]0, 1[$ werken. Immers, zij $A \subseteq]0, 1[$ open in $]0, 1[$, dan bestaat er een open deelverzameling S van $\mathbb{R}$ zodanig dat $A =]0, 1[\cap S$ (spoortopologie). De doorsnede van twee open verzamelingen is open, dus A is open in $\mathbb{R}$. ■

- (4.11) *Beschouw $\mathbb{Q}$ met de gewone metriek. Geef een niet-triviale deelverzameling A van $\mathbb{Q}$ die open en gesloten is in $\mathbb{Q}$. Daaruit volgt dan dat $\mathbb{Q}$ niet samenhangend is.*

Oplossing. Neem de verzameling $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > \sqrt{2}\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq \sqrt{2}\}$. Het is duidelijk dat deze verzameling open en gesloten is in $\mathbb{Q}$, wegens Propositie 4.18. ■

- (4.12) *Bewijs dat $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ samenhangend is.*

Oplossing. Definieer de verzamelingen

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}, \quad A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\} \\ A_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}, \quad A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0\} \\ A_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}, \quad A_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\} \end{aligned}$$

Deze verzamelingen zijn convex en bijgevolg ook samenhangend. Omdat $A_1 \cap A_3 \cap A_5$ niet leeg is, is $A_1 \cup A_3 \cup A_5$ samenhangend. Op analoge wijze tonen we aan dat $A_2 \cup A_4 \cup A_6$ samenhangend is. Aangezien $(A_1 \cup A_3 \cup A_5) \cap (A_2 \cup A_4 \cup A_6)$ ook niet leeg is, geldt er dan dat $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} = \bigcup_{i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} A_i = (A_1 \cup A_3 \cup A_5) \cup (A_2 \cup A_4 \cup A_6)$ samenhangend is. ■

- (4.13) *Beschouw een verzameling V met de discrete metriek d . Beschrijf de compacte verzamelingen en de samenhangend verzamelingen in (V, d) .*

Oplossing. Zij $S \subseteq V$. Als S eindig is, dan is S compact (volgens opgave 4.6). Als S oneindig veel elementen heeft, dan is S niet compact. Immers, door rond elk element van S een open bol met straal $\frac{1}{2}$ te leggen, krijgen we een open overdekking van S zonder eindige deelovertrekking. Elke deelverzameling van V is zowel open als gesloten in V . Bijgevolg zijn de samenhangende verzamelingen van V de singletons. Immers, elke deelverzameling van V met meer dan twee elementen heeft een niet-triviale deelverzameling die open en gesloten is in V . ■

- (4.14) *Geef een metriek op $\mathbb{R}$ zodanig dat het gesloten interval $[0, 1]$ niet samenhangend is.*

Oplossing. We definiëren een metriek d op $[0, 1]$ door $d(x, y) = |x - y|$ als $x \neq 0$ en $y \neq 0$, $d(x, 0) = |x| + 1$ als $x \neq 0$, $d(0, y) = |y| + 1$ als $y \neq 0$ en $d(0, 0) = 0$. Dan is $\{0\}$ open in $[0, 1]$, aangezien $B(0, \frac{1}{2}) = \{0\}$. Volgens opgave 3.7 is het singleton $\{0\}$ ook gesloten in $[0, 1]$. Omdat $\{0\}$ dan open en gesloten is in $[0, 1]$, is $[0, 1]$ niet samenhangend. ■

- (4.15) *Zij (V, d) een metrische ruimte. Zij $S \subseteq V$ compact. Werk de volgende redenering uit om te bewijzen dat elke Cauchyrij in S convergeert: “Zij (x_n) een Cauchyrij in S . Definieer dan (voor alle n) $A_n = \{x_m \mid m \geq n\}$ en $B_n = \overline{A_n}$. Dan bestaat er een $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, en $x_n \rightarrow x$.”*

Oplossing. We bewijzen eerst dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ niet leeg is. Elke verzameling B_n is een gesloten deelverzameling van de compacte verzameling S , en dus zelf compact. Nu is $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \dots\}$ een familie van compacte delen, en de doorsnede van eindig veel elementen van $\mathcal{G}$ is nooit leeg.

Immers, als $\{B_{n_1}, B_{n_2}, \dots, B_{n_k}\}$ een eindige deelverzameling van $\mathcal{G}$ is ($n_1 < n_2 < \dots < n_k$), dan is $B_{n_{k+1}} \subseteq \bigcap_{j \in \{1, 2, \dots, k\}} B_{n_j}$. Volgens Propositie 4.12 is $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ dan inderdaad niet leeg. Kies nu $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Dan is $x \in B_n$ voor elke n , en omdat elke B_n gesloten is heeft (x_n) dan een convergente *deelrij* $(x_{\varphi(n)})$ waarvoor geldt dat $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$. Deze rij kunnen we als volgt construeren: kies $x_{\varphi(1)}$ in B_1 met $d(x_{\varphi(1)}, x) < 1$. Als $x_{\varphi(k)}$ gekozen is, dan kiezen we $x_{\varphi(k+1)}$ in B_{k+1} met $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ en $d(x_{\varphi(k+1)}, x) < \frac{1}{k+1}$. Dat is steeds mogelijk, omdat x in de sluiting van elke A_n ligt. Uit opgave 2.5 weten we dat een Cauchyrij met een convergente deelrij zelf convergent is, en bijgevolg hebben we dat $x_n \rightarrow x$. ■

(4.17) Bekijk $\mathbb{R}$ met de metriek d gedefinieerd door

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

We geven een bewering met een bewijs: “ $\mathbb{R}$ is niet compact. Immers, stel $\mathcal{F} = \{B(0, r) \mid r > 0\}$. Dan is $\mathcal{F}$ een open overdekking van $\mathbb{R}$ die geen eindige deelooverdekking heeft.”

Is de bewering correct? Is het bewijs van de bewering correct?

Oplossing. De bewering is correct, maar het bewijs niet. Het bewijs is fout omdat $\{B(0, 1)\}$ een eindige deelooverdekking is. We geven nu een juist bewijs. Stel $\mathcal{F} = \{B(0, 1 - 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}$, want voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $d(x, 0) < 1$, en voor elke x bestaat er dus een n zodat $d(x, 0) < 1 - 1/n$. Het is duidelijk dat $\mathcal{F}$ geen eindige deelooverdekking heeft, want voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt er dat $d(n, 0) = 1 - 1/(n+1) > 1 - 1/n$. ■

(4.18) Bewijs rechtstreeks dat in $\mathbb{R}$ (met de gewone metriek) het interval $[0, 1]$ compact is. Maak de volgende redenering volledig: “Zij $\mathcal{F}$ een open overdekking van $[0, 1]$. Zij A de verzameling van alle $x \in [0, 1]$ zodat eindig veel elementen van $\mathcal{F}$ het interval $[0, x]$ overdekken. Dan geldt er dat $\{0\} \subseteq A \subseteq [0, 1]$. Definieer $y = \sup A$ en stel dat $y < 1$. Er bestaat een $\varepsilon > 0$ zodat $z \in A$ voor alle $z \in [y, y + \varepsilon]$. Dit geeft een contradictie, dus $\sup A = 1$. Bijgevolg is $[0, 1]$ compact.”

Oplossing. Merk op dat A een interval is. Immers, als $0 < c < d$ en $d \in A$, dan is $c \in A$. Veronderstel nu dat $y = \sup A < 1$, en zij $E \in \mathcal{F}$ een open verzameling met $y \in E$. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat $[y - \varepsilon, y + \varepsilon] \subseteq E$. Merk op dat $y - \varepsilon \in A$ (A is een interval). Zij G een eindige deelooverdekking (van $\mathcal{F}$) voor $[0, y - \varepsilon]$. Dan is $G \cup \{E\}$ een eindige deelooverdekking van $\mathcal{F}$ voor $[0, y + \varepsilon]$, dus $y + \varepsilon \in A$. Dat is een contradictie omdat $y = \sup A$, dus $y = 1$. Neem nu een open verzameling $E' \in \mathcal{F}$ zodat $1 \in E'$. Er bestaat dan een $\varepsilon > 0$ zodat $[b - \varepsilon, b] \subseteq E'$. Nu is $b - \varepsilon \in A$ (A is een interval), dus er bestaat een eindige deelooverdekking G' voor $[0, b - \varepsilon]$. Dan is $G' \cup \{E'\}$ een eindige deelooverdekking voor $[0, 1]$, en we zijn klaar. ■

5 Continue afbeeldingen tussen metrische ruimten

(5.1) Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten en zij $f : A \subseteq V \rightarrow W$ een functie zodat f niet continu is in een punt $a \in A$. Bewijs dat er een open deelverzameling U van W en een rij (x_n) in A bestaan zodat $x_n \rightarrow a$ en $f(a) \in U$, maar $f(x_n) \notin U$ voor alle n .

Oplossing. Omdat f niet continu is in a , bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat er voor elke $\delta > 0$ een $x \in V$ bestaat zodanig dat $d(x, a) < \delta$ en toch $d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$. Kies nu voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ een $x_n \in V$ zodat $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ en $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$, en definieer $U = B(f(a), \varepsilon)$ in (W, d) . Dan geldt er inderdaad dat $x_n \rightarrow a$, en voor alle n is $f(x_n) \notin U$. ■

- (5.2) *Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten en zij $f : A \subseteq V \rightarrow W$ een functie. Bewijs dat f continu is als en slechts als $f^{-1}(G)$ gesloten is in A voor elke gesloten verzameling $G \subseteq W$.*

Oplossing. De gelijkheid $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ is hier essentieel. Stel eerst dat f continu is, en zij G gesloten in W . Dan is G^c open in W , en dus is $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ open in V . Bijgevolg is $f^{-1}(G)$ gesloten in V . Stel nu dat voor elke gesloten verzameling G in W geldt dat $f^{-1}(G)$ gesloten is in V . Zij S een willekeurige open verzameling in W , dan is S^c gesloten in W en dus is $f^{-1}(S^c) = (f^{-1}(S))^c$ gesloten in V . Bijgevolg is $f^{-1}(S)$ open in V . Omdat het inverse beeld van elke open verzameling in W open is in V , moet f continu zijn. ■

- (5.3) *Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten en zij $f : V \rightarrow W$ een willekeurige functie. Toon aan dat de volgende drie eigenschappen dan equivalent zijn:*

- (a) *De functie f is continu.*
- (b) *Voor elke $X \subseteq W$ geldt er dat $f^{-1}(\overset{\circ}{X}) \subseteq (f^{-1}(X))^{\circ}$.*
- (c) *Voor elke $X \subseteq W$ geldt er dat $\overline{f^{-1}(X)} \subseteq f^{-1}(\overline{X})$.*

Oplossing. Veronderstel dat f continu is en zij $X \subseteq W$. Dan is $\overset{\circ}{X}$ open in W , en dus is $f^{-1}(\overset{\circ}{X})$ open in V . Omdat $\overset{\circ}{X} \subseteq X$ geldt er dat $f^{-1}(\overset{\circ}{X}) \subseteq f^{-1}(X)$, en omdat $f^{-1}(\overset{\circ}{X})$ open is hebben we dan dat $f^{-1}(\overset{\circ}{X}) \subseteq (f^{-1}(X))^{\circ}$. Verder geldt er dat $X \subseteq \overline{X}$, dus $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(\overline{X})$. Er geldt dat $\overline{X}$ gesloten is in W , dus $f^{-1}(\overline{X})$ is gesloten in V . Bijgevolg is $\overline{f^{-1}(X)} \subseteq f^{-1}(\overline{X})$. Veronderstel nu dat $f^{-1}(\overset{\circ}{X}) \subseteq (f^{-1}(X))^{\circ}$ voor alle $X \subseteq W$. Als X open is, dan is $\overset{\circ}{X} = X$, en dus $f^{-1}(X) = f^{-1}(\overset{\circ}{X}) \subseteq (f^{-1}(X))^{\circ}$. Omdat $(f^{-1}(X))^{\circ} \subseteq f^{-1}(X)$ is $f^{-1}(X) = (f^{-1}(X))^{\circ}$, dus $f^{-1}(X)$ is open in V . Omdat het inverse beeld van elke open deelverzameling van W open is in V , hebben we dat f continu is. Op analoge wijze kunnen we aantonen dat $\overline{f^{-1}(X)} \subseteq f^{-1}(\overline{X})$ voor alle $X \subseteq W$ impliceert dat het inverse beeld van elke gesloten verzameling in W gesloten is in V , en wegens opgave 5.3 impliceert dit dat f continu is. Daarmee zijn we klaar. ■

- (5.4) *Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten. Zij $f : V \rightarrow W$ een functie. Bewijs dat f continu is als en slechts als $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ voor alle $E \subseteq V$. Geef ook een voorbeeld waarbij $f(\overline{E}) \neq \overline{f(E)}$. Geldt voor een continue functie altijd dat $f(\overset{\circ}{E}) \supseteq (f(E))^{\circ}$?*

Oplossing. Veronderstel eerst dat f continu is. Zij $E \subseteq V$ en kies $x \in \overline{E}$ willekeurig. Zij (x_n) een rij in E zodat $x_n \rightarrow x$. Omdat f continu is, geldt er dat $f(x_n) \rightarrow f(x)$. De rij $(f(x_n))$ is een rij in $f(E)$, en bijgevolg geldt er voor de limiet $f(x)$ dat $f(x) \in \overline{f(E)}$, zodat $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$. Stel nu dat voor alle $E \subseteq V$ geldt dat $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$. Zij $A \subseteq W$ gesloten, en stel $B = f^{-1}(A)$. Volgens oefening 5.2 is het voldoende om te bewijzen dat B gesloten is. Merk op dat $B \subseteq \overline{B}$ en $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)} \subseteq \overline{A} = A$. Bijgevolg geldt er dat $f^{-1}(f(\overline{B})) \subseteq f^{-1}(A) = B$. Er geldt echter ook dat $f^{-1}(f(\overline{B})) \supseteq \overline{B}$, dus $\overline{B} \subseteq B$. Bijgevolg is $B = \overline{B}$, dus B is gesloten.

Beschouw $\mathbb{R}$ met de gewone metrie en definieer de functie $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{|x|+1}$. Er geldt dan dat $f_1(\mathbb{R}) =]0, 1]$ en dat $\overline{f_1(\mathbb{R})} = [0, 1]$. Voor de functie $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arctan x$ geldt dat $f_2(\mathbb{R}) =]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ en ook dat $\overline{f_2(\mathbb{R})} = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. In beide gevallen is $f(\overline{E}) \neq \overline{f(E)}$. De inclusie $f(\overset{\circ}{E}) \supseteq (f(E))^\circ$ geldt niet altijd. Beschouw bijvoorbeeld de projectie-afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ en neem voor E de x -as in $\mathbb{R}^2$. Dan is $f(\overset{\circ}{E}) = \emptyset$ en $(f(E))^\circ = \mathbb{R}$. ■

- (5.7) *Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten, zij $A \subseteq V$ compact en zij $f : A \rightarrow W$ continu. Bewijs dat f gelijkmatig continu is. Gebruik het feit dat elke rij in A een convergente deelrij heeft.*

Oplossing. Stel dat f niet gelijkmatig continu is, dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodat er voor elke $\delta > 0$ een x en een y in A bestaan met $d(x, y) < \delta$ en toch $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Door $\delta = \frac{1}{n}$ te kiezen krijgen we twee rijen (x_n) en (y_n) in A zodat $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ en $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ voor alle n . Omdat A compact is, heeft (x_n) een convergente deelrij $(x_{\varphi(n)})$, waarbij φ een strikt stijgende functie is. De rij $(y_{\varphi(n)})$ heeft een convergente deelrij $(y_{\psi(\varphi(n))})$, en de rij $(x_{\psi(\varphi(n))})$ is nog steeds convergent, als deelrij van een convergente rij. Zijn x en y de limieten van deze deelrijen, dan moet $x = y$ (omdat $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$). Omdat f continu is zal $f(x_{\psi(\varphi(n))}) \rightarrow f(x)$ en $f(y_{\psi(\varphi(n))}) \rightarrow f(y) = f(x)$. Dat is een contradictie, want we weten dat $d(x_{\psi(\varphi(n))}, y_{\psi(\varphi(n))}) \geq \varepsilon$ voor alle n . Daarmee zijn we klaar. ■

- (5.8) *Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten en zij D een dichte deelverzameling van V . Zijn $f : V \rightarrow W$ en $g : V \rightarrow W$ continue functies zodat $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D$. Bewijs dat $f = g$.*

Oplossing. Kies $v \in V$ willekeurig. We moeten aantonen dat $f(v) = g(v)$. Omdat D dicht is in V bestaat er een rij (v_n) in D waarvoor geldt dat $v_n \rightarrow v$. Omdat f en g continue functies zijn, geldt er ook dat $f(v_n) \rightarrow f(v)$ en $g(v_n) \rightarrow g(v)$. Er geldt echter dat $f(v_n) = g(v_n)$ voor alle n , en daaruit volgt dan, wegens uniciteit van de limiet, dat $f(v) = g(v)$. ■

- (5.9) *Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten, zij $a \in W$ en zij $f : A \subseteq V \rightarrow W$ een continue functie. Bewijs op twee verschillende manieren dat de verzameling $\{x \in A \mid f(x) = a\}$ gesloten is in A .*

Oplossing. Het singleton $\{a\}$ is gesloten in W (zie oefening 3.7). Uit oefening 5.2 volgt er dan dat $f^{-1}(\{a\})$ gesloten is in A , en $f^{-1}(\{a\})$ is precies de gegeven verzameling.

We geven nu een alternatief bewijs. Neem een convergente rij (x_n) in $\{x \in A \mid f(x) = a\}$ met limiet L . Omdat $x_n \rightarrow L$, en omdat f continu is, zal $f(x_n) \rightarrow f(L)$. De rij $(f(x_n))$ is echter een constante rij, want $f(x_n) = a$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Bijgevolg moet $f(L) = a$, en daaruit volgt dat $L \in \{x \in A \mid f(x) = a\}$. Bijgevolg is deze verzameling gesloten. ■

- (5.14) *Zijn (V, d) en (W, d) metrische ruimten en zij $A \subseteq V$. Zij $f : A \rightarrow W$ een continue functie en zij (x_n) een Cauchyrij in A . Is $(f(x_n))$ dan altijd een Cauchyrij? Indien nee, is het mogelijk om voorwaarden op f en/of A te leggen zodanig dat de conclusie verandert?*

Oplossing. De rij $(f(x_n))$ is niet noodzakelijk een Cauchyrij. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door $V = W = \mathbb{R}$ (met de gewone metrie), $A = \mathbb{R}_0^+$, $x_n = \frac{1}{n}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$. Dan is de rij $(f(x_n)) = (n)$ duidelijk geen Cauchyrij. In dit geval is f niet gelijkmatig continu.

Als f gelijkmatig continu is geldt de uitspraak wel. Zij (x_n) een Cauchyrij in A . Kies $\varepsilon > 0$

willekeurig. Omdat f gelijkmatig continu is, bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x, y \in A$ met $d(x, y) < \delta$ geldt dat $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Omdat (x_n) een Cauchyrij is, bestaat er een n_0 zodat voor $m, n \geq n_0$ geldt dat $d(x_m, x_n) < \delta$. Voor alle $m, n \geq n_0$ geldt dan natuurlijk ook dat $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$, en daaruit volgt het resultaat. ■

6 Continue functies met domein en/of beeld in $\mathbb{R}^p$

(6.4) Zij $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ een lineaire afbeelding. Toon aan dat T gelijkmatig continu is.

Oplossing. Zij $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^p$, en definieer $M = \max_j \|T(e_j)\|$. Kies $x \in \mathbb{R}^p$ en schrijf $x = \sum_j \lambda_j e_j$, met de $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Uit Cauchy-Schwarz volgt dan

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_j \lambda_j T(e_j) \right\| \leq \sum_j |\lambda_j| \cdot \|T(e_j)\| \leq M \sum_j |\lambda_j| \leq M\sqrt{p} \|x\|.$$

We kunnen hieruit afleiden dat T gelijkmatig continu is. Immers, kies $\varepsilon > 0$ en neem $\delta = \frac{\varepsilon}{M\sqrt{p}}$, dan volgt uit $x, y \in \mathbb{R}^p$ en $\|x - y\| < \delta$ dat

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq M\sqrt{p} \|x - y\| < M\sqrt{p} \cdot \delta = \varepsilon.$$

Daaruit volgt het resultaat onmiddellijk. ■

(6.5) Stel dat $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en dat $f(\mathbb{R}^p) \subseteq \mathbb{Q}$. Wat weet je over f ?

Oplossing. Het beeld van de samenhangende verzameling $\mathbb{R}^p$ onder de continue functie f is weer een samenhangende verzameling. De samenhangende componenten van $\mathbb{Q}$ zijn precies de “rationale punten”, dus het beeld van f is een punt, of nog, f is constant. ■

(6.6) Zij $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Definieer de grafiek G van f als $G = \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\}$. Bewijs dat f continu is als en slechts als G gesloten en begrensd (compact) is in $\mathbb{R}^2$. Geef een voorbeeld van een functie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die niet continu is maar wel een gesloten grafiek heeft.

Oplossing. Stel dat f continu is. Neem een convergente rij $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots$ in G , met limiet (x, y) . Omdat $x_n \rightarrow x$ is $f(x_n) \rightarrow f(x)$, dus is $y = f(x)$. Omdat $[0, 1]$ gesloten is, zal $x \in [0, 1]$, dus geldt er $(x, y) = (x, f(x)) \in G$. Bijgevolg is G gesloten. Omdat f continu is en omdat $[0, 1]$ compact is, is ook $f([0, 1])$ compact (en dus begrensd). Daaruit volgt eenvoudig dat ook G begrensd is. Bijgevolg is G gesloten en begrensd, of nog, compact.

Veronderstel nu dat G compact is. Veronderstel dat f discontinu is in $x \in [0, 1]$. Er bestaat dan een $\varepsilon > 0$ zodat voor elke $\delta > 0$ een $y \in [0, 1]$ bestaat met $|x - y| < \delta$ en $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Als we $\delta = \frac{1}{n}$ kiezen dan krijgen we een rij (x_n) in $[0, 1]$ zodat $x_n \rightarrow x$ en $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ voor alle n . Nu heeft de rij $(x_n, f(x_n))$ een convergente deelrij $(x_{k_n}, f(x_{k_n}))$, want G is compact. We weten echter dat $x_n \rightarrow x$, dus $x_{k_n} \rightarrow x$. Omdat G gesloten is, is $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \rightarrow (x, f(x))$. Dat is een contradictie omdat $|f(x_{k_n}) - f(x)| \geq \varepsilon$ voor alle n . Bijgevolg is f continu. Als $g(0) = 0$ en $g(x) = \frac{1}{x}$ (voor $x \neq 0$), dan is g niet continu in 0, maar G is wel gesloten. ■

Afgeleiden I

Oplossingen van enkele oefeningen

1 Definitie, voorbeelden en elementaire eigenschappen

- (1.2) Zij $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ een functie die differentieerbaar is in een inwendig punt $a \in A$. Toon aan dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat uit $0 < |h| < \delta$ volgt dat $a - h \in A$, $a + h \in A$ en

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Oplossing. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat f differentieerbaar is in a en omdat $a \in \overset{\circ}{A}$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat uit $0 < |x - a| < \delta$ volgt dat $x \in A$ en $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon$. Volgens de driehoeksongelijkheid is

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{f(a) - f(a-h)}{h} - f'(a) \right|.$$

Als nu $0 < |h| < \delta$ dan geldt er dat $a - h \in A$, $a + h \in A$ en

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} - f'(a) \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{f(a-h) - f(a)}{(a-h) - a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Bijgevolg geldt er inderdaad dat

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De omgekeerde uitspraak geldt niet. Een geschikt tegenvoorbeeld is $f(x) = |x|$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. We kunnen natuurlijk ook $f(x) = 0$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 1$ kiezen. ■

- (1.3) Zijn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en zij $A = \{x \in \mathbb{R} \mid cx + d \neq 0\}$. Definieer $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$. Bewijs dat f constant is als f' een nulpunt heeft.

Oplossing. Er geldt dat

$$f'(x) = \frac{(cx + d)a - (ax + b)c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

Als f' een nulpunt heeft moet dus $ad = bc$, zodat

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + bc/a} = \frac{a}{c}, \quad \forall x \in A. \quad \blacksquare$$

- (1.5) Zijn $a, b, c \in \mathbb{R}$ en zij f een functie zodat $f(x) = x^2$ voor $x \leq c$ en $f(x) = ax + b$ voor $x > c$. Voor welke waarden van a en b (in functie van c) zal f differentieerbaar zijn in c ?

Oplossing. Er moet gelden dat f links- en rechts-afleidbaar is in a en dat de linkerafgeleide gelijk is aan de rechteraafgeleide. Bijgevolg moet $c^2 = ac + b$ en $a = 2c$, zodat $b = -c^2$. ■

- (1.6) Zij $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injectief. Stel dat $a \in A$ en dat f differentieerbaar is in a . Stel dan dat de inverse functie f^{-1} differentieerbaar is in $f(a)$. Toon aan dat $f'(a) \neq 0$.

Oplossing. Dit is een toepassing van de kettingregel. Alle voorwaarden uit Propositie 1.9 zijn voldaan, en dus is $f^{-1} \circ f$ differentieerbaar in a met $(f^{-1})'(a) \cdot f'(a) = (f^{-1} \circ f)'(a) = 1$ (omdat $f^{-1} \circ f$ de identieke functie is). Bijgevolg is $f'(a) \neq 0$. ■

- (1.7) Definieer de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = x^2$ als x rationaal is, $f(x) = 0$ als x irrationaal is. Toon aan dat f continu is in juist één punt. Is f daar ook differentieerbaar?

Oplossing. We bewijzen dat f continu en differentieerbaar is in 0. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en neem $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Als $x \in \mathbb{Q}$ en $|x| < \delta$ dan zal $f(x) = x^2 < \delta^2 = \varepsilon$. Als $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dan geldt er dat $f(x) = 0 < \varepsilon$. Bijgevolg is f continu in 0. Stel nu dat f continu is in een punt $a \neq 0$. Er moet dan een $\delta_a > 0$ bestaan zodat uit $|x - a| < \delta_a$ volgt dat $|f(x) - f(a)| < a^2$. Stel eerst even dat $a \in \mathbb{Q}$. Tussen a en $a + \delta_a$ ligt er dan zeker een irrationaal getal y . Dan is $|f(y) - f(a)| = a^2$, contradictie. Stel nu dat $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dan ligt er een rationaal getal z tussen $a - \delta_a$ en $a + \delta_a$ waarvoor $|z| > |a|$. Dan geldt er dat $|f(z) - f(a)| = z^2 > a^2$, opnieuw een contradictie.

We tonen nu nog aan dat f differentieerbaar is in 0 met $f'(0) = 0$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en kies $\delta = \varepsilon$. Als x irrationaal is dan is $f(x) = 0$, en als x rationaal is dan impliceert $0 < |x| < \delta$ dat $\left| \frac{f(x) - 0}{x - 0} \right| = |x| < \delta = \varepsilon$. Daaruit volgt dan het resultaat. ■

- (1.8) Bestaat er een functie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die continu is in het punt 0, die discontinu is op heel $\mathbb{R}_0$ en die twee keer differentieerbaar is in het punt 0?

Oplossing. Een dergelijke functie kan niet bestaan. Immers, f is enkel continu in 0, dus de eerste afgeleide kan enkel bestaan in 0. De tweede afgeleide kan dan niet bestaan omdat het inwendige van het beeld van de eerste afgeleide de lege verzameling is. ■

2 De middelwaardestelling en de stelling van Taylor

- (2.1) Stel dat f en g twee continue functies zijn van $[a, b]$ naar $\mathbb{R}$ die differentieerbaar zijn op $]a, b[$. Bewijs dat er een $c \in]a, b[$ bestaat zodat $(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$.

Oplossing. Definieer de functie $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$h(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g(x).$$

Uit Propositie 1.7 volgt dat h continu is en differentieerbaar op $]a, b[$. We kunnen eenvoudig inzien dat $h(a) = h(b) = f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a)$. Er bestaat dus een $c \in]a, b[$ zodat $h'(c) = 0$ (zie het bewijs van Stelling 2.1), en dat is natuurlijk precies de c die we zochten. ■

- (2.2) Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu op $[a, b]$ en differentieerbaar in $]a, b[$. Bewijs dat f injectief is als er geldt dat $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in]a, b[$. Geldt de omgekeerde uitspraak omgekeerde ook?

Oplossing. Stel even dat f niet injectief is, dan bestaan er $c, d \in [a, b]$ zodanig dat $f(c) = f(d)$, met $c \neq d$. Volgens de middelwaardestelling is $f(c) - f(d) = f'(\xi)(c - d)$ voor een zekere ξ tussen c en d . Omdat $c - d \neq 0$ moet $f'(\xi) = 0$, en dat is een contradictie.

De omgekeerde uitspraak geldt niet. Immers, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ is injectief, en $f'(0) = 0$. ■

(2.4) *Toon aan dat*

$$\left| 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \right| \leq \frac{1}{24}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Oplossing. Kies $x \in [-1, 1]$. De cosinusfunctie is vier maal afleidbaar op heel $\mathbb{R}$. Bijgevolg bestaat er, volgens de stelling van Taylor, een ξ tussen 0 en x zodanig dat

$$\cos x = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \cos^{(k)}(0) \cdot (x-0)^k + \frac{1}{4!} \cos^{(4)}(\xi) \cdot (x-0)^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cos \xi.$$

Omdat $|x| \leq 1$ geldt er dan dat $\left| 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \right| = \left| \frac{x^4}{24} \cos \xi \right| \leq \frac{1}{24}$. ■

(2.5) *Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Zijn $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Bewijs dat er een $c \in]a, b[$ bestaat zodanig dat $f'(c) = \lambda$.*

(2.7) *Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zodat $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat f constant is.*

Oplossing. Het is voldoende om aan te tonen dat f afleidbaar is in elke $a \in \mathbb{R}$, met $f'(a) = 0$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \varepsilon$. Als $0 < |x - a| < \delta$ dan geldt er dat

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Daaruit volgt het resultaat natuurlijk onmiddellijk. ■

(2.8) *Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel dat je weet dat $f'(x)$ bestaat voor alle $x \neq 0$ en dat $f'(x) \rightarrow 3$ als $x \rightarrow 0$. Kan je daaruit besluiten dat f differentieerbaar is in 0?*

Oplossing. We bewijzen dat f afleidbaar is in 0 met $f'(0) = 3$. We moeten bewijzen dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat uit $0 < |x| < \delta$ volgt dat

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 3 \right| < \varepsilon.$$

(2.11) *Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie en stel dat de afgeleide functie f' begrensd is. Bewijs dat f gelijkmatig continu is.*

Oplossing. Definieer $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$. Als $M = 0$ dan is f constant en dan zijn we klaar. Stel dus dat $M \neq 0$, kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en neem $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Kies $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x - y| < \delta$. Volgens de middelwaardestelling bestaat er een ξ tussen x en y zodat $f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y)$. Bijgevolg geldt er $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq M \cdot \delta = \varepsilon$, dus f is gelijkmatig continu. ■

(2.14) *Definieer voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ een functie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door*

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergeert naar de nulfunctie f . Toon ook aan dat elke functie f_n differentieerbaar is, en dat de rij functies (f'_n) niet (puntsgewijs) convergeert naar f' . Bijgevolg is het omgekeerde van Opmerking 2.4.iii niet geldig.

- (2.16) Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ driemaal differentieerbaar en stel dat $f(-1) = f(0) = f'(0) = 0$ en $f(1) = 1$. Bewijs dat er een $c \in]-1, 1[$ bestaat zodat $f^{(3)}(c) \geq 3$.

Oplossing. Volgens de stelling van Taylor bestaat er een ξ met $-1 < \xi < 0$ zodanig dat

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f^{(2)}(0) + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi).$$

Analoog vinden we een η met $0 < \eta < 1$ zodat

$$f(-1) = f(0) - f'(0) + \frac{1}{2}f^{(2)}(0) - \frac{1}{6}f^{(3)}(\eta).$$

Bijgevolg geldt er $f^{(3)}(\xi) + f^{(3)}(\eta) = 6$. Er moet dus gelden dat $\max\{f^{(3)}(\xi), f^{(3)}(\eta)\} \geq 3$.

Daaruit volgt natuurlijk het resultaat. ■

- (2.17) Stel dat $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tweemaal differentieerbaar is en stel dat $f^{(2)}(x) \geq 0$ voor alle $x \in]a, b[$. Toon aan dat f convex is, of nog, bewijs dat

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \quad \forall x, y \in]a, b[, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Oplossing. Aangezien $f^{(2)}(x) \geq 0$ voor alle $x \in]a, b[$, geldt er dat f' stijgend is op $]a, b[$. Kies nu $x, y \in]a, b[$ willekeurig en stel $z = (1-t)x + ty$ met $0 < t < 1$, dan geldt er dat $x < z < y$. (Als $t = 0$ of als $t = 1$ valt er niks te bewijzen.) Volgens de middelwaardestelling bestaan er getallen ξ en η met $x < \xi < z < \eta < y$ zodanig dat

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi) \quad \text{en} \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\eta).$$

Omdat f' stijgend is geldt er dat $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, of nog,

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Merk nu op dat $z - x = t(y - x) > 0$ en $y - z = (1-t)(y - x) > 0$. Uit de vorige ongelijkheid volgt nu dat $(1-t)(f(z) - f(x)) \leq t(f(y) - f(z))$, of nog, $f(z) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$, maar dat is natuurlijk precies wat we moesten bewijzen. ■

- (2.18) Stel $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ voor $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergeert naar een functie f . Toon aan dat $f'(x) = \lim_n f'_n(x)$ voor alle $x \neq 0$ en $\lim_n f'_n(0) \neq f'(0)$.

Oplossing. We bewijzen dat (f_n) uniform convergeert naar de nulfunctie. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. We moeten bewijzen dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $n \geq n_0$ en voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f_n(x)| < \varepsilon$, of nog, $|x| < (1+nx^2)\varepsilon$. Kies $n_0 > \frac{1}{4\varepsilon^2}$, dan geldt voor $n \geq n_0$ dat

$$(1+nx^2)\varepsilon \geq (1+n_0x^2)\varepsilon \geq 2\sqrt{n_0}|x|\varepsilon > 2\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}}|x|\varepsilon = |x|.$$

Daaruit volgt de uniforme convergentie van (f_n) . Verder is f_n duidelijk afleidbaar voor elke n . We vinden dat

$$f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

Het is duidelijk dat voor $x \neq 0$ geldt dat $f'(x) = \lim_n f'_n(x) = 0$. Er geldt echter dat $f'_n(0) = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $\lim_n f'_n(0) = 1 \neq f'(0) = 0$. We mogen hier limiet en afgeleide dus niet verwisselen omdat de convergentie van de rij (f'_n) niet uniform is (zie Propositie 2.3). ■

Afgeleiden II

Oplossingen van enkele oefeningen

1 Partiële afgeleiden

- (1.2) Definieer $A = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 \neq 0\}$ en definieer $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 0, x_1 \neq x_2\}$. Bereken $D_2(f \circ g)$ als

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} : (y_1, y_2, y_3) \mapsto \frac{y_1 y_2}{y_3} \quad \text{en} \quad g : B \mapsto \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \mapsto \left(\sin x_1 x_2, \exp(x_1^2 x_2^2), \ln \frac{x_1}{x_2} \right).$$

Oplossing. Definieer de functie g_{x_1} (van een open deel van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^3$) door $g_{x_1}(x_2) = g(x_1, x_2)$. Dan is $f \circ g_{x_1}$ een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, en $D_2(f \circ g)(x_1, x_2) = (f \circ g_{x_1})'(x_2)$ zodat

$$D_2(f \circ g)(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^3 (D_j f)(g_{x_1}(x_2)) \cdot g'_{x_1 j}(x_2)$$

volgens Propositie 1.4. Het resultaat is dan

$$\frac{\exp(x_1^2 x_2^2)}{\ln \frac{x_1}{x_2}} \cdot x_1 \cos x_1 x_2 + \frac{\sin x_1 x_2}{\ln \frac{x_1}{x_2}} \cdot 2x_1^2 x_2 \exp(x_1^2 x_2^2) + \frac{\sin x_1 x_2 \cdot \exp(x_1^2 x_2^2)}{\ln^2 \frac{x_1}{x_2}} \cdot \frac{1}{x_2}. \blacksquare$$

- (1.3) Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partieel afleidbaar. Definieer de functie ∇f door

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \nabla f(x) = (D_1 f(x), D_2 f(x), \dots, D_n f(x)).$$

We noemen ∇f de gradiënt van f . Bewijs de volgende eigenschappen:

- (a) Er geldt dat $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
(b) Als f nergens 0 wordt, dan geldt er dat $\nabla(\frac{1}{f}) = -\frac{\nabla f}{f^2}$.

Oplossing. Voor alle x geldt er dat

$$\begin{aligned} \nabla(fg)(x) &= (D_1(fg)(x), D_2(fg)(x), \dots, D_n(fg)(x)) \\ &= (f(x)D_1g(x) + g(x)D_1f(x), \dots, f(x)D_ng(x) + g(x)D_nf(x)) \\ &= f(x)(D_1g(x), \dots, D_ng(x)) + g(x)(D_1f(x), \dots, D_nf(x)) \\ &= (f\nabla g + g\nabla f)(x). \end{aligned}$$

De tweede gelijkheid kunnen we op analoge wijze bewijzen. $\blacksquare$

- (1.4) Zij $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ en zij $a \in \overset{\circ}{A}$. Kies $u \in \mathbb{R}^p$ met $\|u\| = 1$. Stel $T_u = \{t \in \mathbb{R} \mid a + tu \in A\}$. Bewijs dat 0 een inwendig punt is van T_u . Definieer dan $g_u : T_u \rightarrow \mathbb{R}$ door $g_u(t) = f(a + tu)$. Als g_u afleidbaar is in 0, dan noemen we f afleidbaar in a volgens de richting u . We noteren dan $(D_u f)(a) = g'_u(0)$ en we noemen $(D_u f)(a)$ de richtingsafgeleide van f in a volgens u .

- (a) Bewijs dat de functie f partieel afleidbaar is in a als en slechts als f afleidbaar is in a volgens de p richtingen $e_1, e_2, \dots, e_p$.

(b) Toon aan dat er een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat die partieel afleidbaar is in a maar die in a niet afleidbaar is volgens alle richtingen.

Oplossing. We tonen eerst aan dat 0 een inwendig punt is van T_u . Omdat $a \in \mathring{A}$ bestaat er een $\delta > 0$ zodat uit $\|x - a\| < \delta$ volgt dat $x \in A$. Als $|t| < \delta$ zal $\|(a + tu) - a\| = \|tu\| = |t| < \delta$, dus hebben we dat $a + tu \in A$ en $t \in T_u$. Bijgevolg is $B(0, \delta) \subseteq T_u$, of nog, 0 is inwendig in T_u . We bewijzen nu (a). Er geldt dat f afleidbaar is in a volgens de richting e_j als en slechts als

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_{e_j}(t) - g_{e_j}(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

bestaat, of nog, als en slechts als f afleidbaar is naar de j -de veranderlijke.

Voor (b) nemen we $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ als $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = 0$. Kies $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Uit Voorbeeld 1.2 weten we dat f partieel afleidbaar is in $a = (0, 0)$. Echter,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_u(t) - g_u(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{2 \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}.$$

Deze limiet bestaat niet, dus f is niet afleidbaar in $(0, 0)$ volgens de richting $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

(1.5) Definieer $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(0, 0) = 0$ en

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{als } (x, y) \neq (0, 0).$$

Bewijs de volgende twee eigenschappen:

(a) In elk punt $a \in \mathbb{R}^2$ is f afleidbaar volgens alle richtingen.

(b) De functie f is niet continu in $(0, 0)$.

Oplossing. In deze oplossing gebruiken we de notatie van oefening 1.4. Zij $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ een willekeurig punt en zij $u = (u_1, u_2)$ een eenheidsvector, dan is

$$g_u(t) = f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) = \frac{(a_1 + tu_1)(a_2 + tu_2)^2}{(a_1 + tu_1)^2 + (a_2 + tu_2)^4}.$$

Dit is een rationale functie van t die goed gedefinieerd en differentieerbaar is zolang de noemer niet 0 wordt. Als $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, dan bestaat er een omgeving van 0 waar de noemer niet 0 wordt, en dan is $g_u(0)$ afleidbaar in 0 , of nog, f is afleidbaar in (a_1, a_2) volgens de richting u .

Stel nu dat $(a_1, a_2) = (0, 0)$, dan is

$$g_u(t) = \frac{u_1 u_2^2 t}{u_1^2 + u_2^4 t^2}.$$

Als $u_1 \neq 0$, dan hebben we

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_u(t) - g_u(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + t^2 u_2^4} = \frac{u_2^2}{u_1},$$

dus dan is g_u afleidbaar in 0 . Als $u_1 = 0$, dan is g_u identiek 0 , en dus ook differentieerbaar.

Toch is f niet continu in $(0, 0)$. Neem bijvoorbeeld de rij $x_n = (n^{-2}, n^{-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, dan is $x_n \rightarrow (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Voor alle n hebben we echter dat $f(x_n) = \frac{1}{2}$, en $f(0, 0) = 0$.

2 De totale afgeleide

(2.3) Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. De q coördinaatsfuncties $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ worden gedefinieerd door $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ voor alle x . Zij $a \in \overset{\circ}{A}$. Bewijs dat f differentieerbaar is in a als en slechts als elke coördinaatsfunctie f_j differentieerbaar is in a .

Oplossing. Veronderstel eerst dat f differentieerbaar is in a en stel $T = (df)(a)$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en kies $\delta > 0$ zodat uit $\|x - a\| < \delta$ en $x \in A$ volgt dat

$$\frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon.$$

Als $\|x - a\| < \delta$ dan geldt er natuurlijk ook voor elke j dat

$$\frac{|f_j(x) - f_j(a) - T_j(x - a)|}{\|x - a\|} < \varepsilon,$$

en bijgevolg is f_j totaal afleidbaar in a . Immers, T_j is ook lineair.

Veronderstel nu dat elke coördinaatsfunctie f_j totaal afleidbaar is in a , met als afgeleide T_j .

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta > 0$ zodat uit $0 < \|x - a\| < \delta$ volgt dat

$$\frac{|f_j(x) - f_j(a) - T_j(x - a)|}{\|x - a\|} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}},$$

voor alle j . Zij $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ de afbeelding gegeven door $T(x) = (T_1(x), T_2(x), \dots, T_q(x))$.

Het is duidelijk dat T lineair is, en als $0 \leq \|x - a\| < \delta$ hebben we dat

$$\frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} \leq \sqrt{q} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}} = \varepsilon.$$

Daaruit volgt dan dat f totaal afleidbaar met afgeleide T . ■

(2.4) Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ totaal afleidbaar in $(1, 1)$. Veronderstel dat de afgeleide gegeven wordt door

$$df(1, 1) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto -2u + 3v.$$

Beschouw de functie

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(\cos t, e^t).$$

Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bereken $g'(0)$.

Oplossing. De functie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, e^t)$ is overal totaal afleidbaar, als samenstelling van afleidbare functies, en $h(0) = (1, 1)$. Bijgevolg is f totaal afleidbaar in $h(0)$. De kettingregel geeft dan dat $g = f \circ h$ totaal afleidbaar is in 0 met afgeleide

$$(dg)(0) = (df)(h(0)) \circ (dh)(0) = (df)(1, 1) \circ (dh)(0).$$

Merk nu op dat $(dh)(0)$ gegeven wordt door $(dh)(0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (0, x)$. Immers, uit de vorige opgave volgt dat $((dh)(t))(x) = (-x \sin t, xe^t)$ voor alle $t, x \in \mathbb{R}$. Bijgevolg is

$$g'(0) = ((dg)(0))(1) = ((df)(1, 1))(0, 1) = -2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3. \blacksquare$$

- (2.5) Zij $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ en zij a een inwendig punt van A . Veronderstel dat f totaal afleidbaar is in a . Gebruik de kettingregel om aan te tonen dat f afleidbaar is in a volgens alle richtingen en geef ook een formule voor de richtingsafgeleiden in termen van de totale afgeleide.

Oplossing. Zij $u \in \mathbb{R}^p$ met $\|u\| = 1$ en definieer $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p : t \mapsto a + tu$. Dan is h totaal afleidbaar in 0, met $((dh)(0))(t) = tu$ voor alle t . Er geldt ook dat f afleidbaar is in $h(0) = a$, en uit de kettingregel volgt dan dat $g_u = f \circ h$ afleidbaar is in 0 met afgeleide

$$(dg_u)(0) = (df)(h(0)) \circ (dh)(0) = (df)(a) \circ (dh)(0).$$

Bijgevolg hebben we dat $(D_u f)(a) = g'_u(0) = ((dg_u)(0))(1) = ((df)(a))(u)$. ■

- (2.6) Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ totaal afleidbaar en zijn $x, u \in \mathbb{R}^n$ met $\|u\| = 1$. Bewijs dat

$$(D_u f)(x) = \langle \nabla f(x), u \rangle.$$

Toon aan dat de gradiënt ∇f de richting geeft waarin f het snelst stijgt.

Oplossing. Uit de vorige opgave weten we dat $(D_u f)(x) = ((df)(x))(u)$.

3 Het verband tussen partiële afgeleiden en de totale afgeleide

- (3.1) Definieer $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(0,0) = 0$ en

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \text{ als } (x, y) \neq (0, 0).$$

- (a) Bewijs dat f continu is en dat $D_1 f$ en $D_2 f$ begrensd zijn.
 - (b) Zij $a \in \mathbb{R}^2$. Bewijs dat f differentieerbaar is in a volgens alle richtingen.
 - (c) Zij $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ een differentieerbare afbeelding zodat $\gamma(0) = (0, 0)$ en zodat $(\gamma'_1(0), \gamma'_2(0)) \neq (0, 0)$. Toon aan dat $f \circ \gamma$ dan differentieerbaar is in 0.
 - (d) Bewijs dat f niet totaal afleidbaar is in $(0, 0)$.
- (3.3) Zijn $f, g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ en zij $a \in \mathbb{R}^p$. Veronderstel dat f continu is in a en dat g totaal afleidbaar is in a met $g(a) = 0$. Bewijs dan dat fg ook totaal afleidbaar is in a en dat

$$(d(fg))(a) = f(a) \cdot (dg)(a).$$

Oplossing.

- (3.4) Een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is homogeen van graad n als $f(tx) = t^n f(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ en voor elke $t \geq 0$. Zij $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
- (a) de functie f is homogeen van graad n , en
 - (b) voor elke $a \in \mathbb{R}^p$ is $((df)(a))(a) = nf(a)$.

Oplossing. Zij $a \in \mathbb{R}^p$. Stel dat f homogeen is van graad n , dan hebben we dat $f(ta) = t^n f(a)$ voor elke $t \geq 0$. Definieer $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p : t \mapsto ta$ en $h = f \circ g$. Volgens de kettingregel is

$$(dh)(t) = (df)(g(t)) \circ (dg)(t) \quad \text{zodat} \quad nt^{n-1}f(a) = ((df)(ta))(a).$$

Voor $t = 1$ krijgen we dan inderdaad dat $nf(a) = ((df)(a))(a)$.

Stel nu dat $((df)(a))(a) = nf(a)$ voor alle a . Kies opnieuw $a \in \mathbb{R}^p$ en definieer

$$c : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{f(ta)}{t^n}.$$

We willen bewijzen dat c een constante functie is. Merk op dat c differentieerbaar is, als samenstelling van differentieerbare functies. De afgeleide wordt gegeven door

$$\frac{t^n \cdot ((df)(ta))(a) - f(ta) \cdot nt^{n-1}}{t^{2n}} = \frac{t \cdot ((df)(ta))(a) - nf(ta)}{t^{n+1}} = \frac{(df)(ta)(ta) - nf(ta)}{t^{n+1}} = 0.$$

Bijgevolg is c constant op $\mathbb{R}_0^+$. Omdat $c(1) = f(a)$ zal dus $f(ta) = t^n f(a)$ voor alle $t > 0$. Natuurlijk geldt de gelijkheid ook voor $t = 0$ omdat f continu is. ■

- (3.6) *Beschouw de functie $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x(1 - y)$. Bepaal een functie $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ differentieerbaar is.*

Oplossing. Er moet voldaan zijn aan de Cauchy-Riemann voorwaarden, dus

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2(1 - y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2x.$$

We kunnen dan $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$ kiezen. ■

- (3.7) *Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ totaal afleidbaar en stel dat*

$$3x^2f(x, y) - 2x^2y^2 + f(x, y)^3 - 3yf(x, y) = 7$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Bepaal $(D_1f)(1, 1)$ en $(D_2f)(1, 1)$.

Oplossing. Door $x = y = 1$ te nemen vinden we

$$3f(1, 1) - 2 + f(1, 1)^3 - 3f(1, 1) = 7 \quad \text{of} \quad f(1, 1) = \sqrt[3]{9}.$$

Door de gegeven betrekking partieel af te leiden naar x vinden we

$$6xf(x, y) - 3x^2(D_1f)(x, y) - 4xy^2 + 3f(x, y)^2(D_1f)(x, y) - 3y(D_1f)(x, y) = 0.$$

Voor $x = y = 1$ wordt dit

$$6f(1, 1) - 3(D_1f)(1, 1) - 4 + 3f(1, 1)^2(D_1f)(1, 1) - 3(D_1f)(1, 1) = 0$$

zodat $(D_1f)(1, 1) = \frac{4 - 6\sqrt[3]{9}}{9\sqrt[3]{3}}$. Op analoge wijze vinden we dan $(D_2f)(1, 1) = \frac{4 + 3\sqrt[3]{9}}{9\sqrt[3]{3}}$. ■

- (3.9) *Zoek een differentieerbare functie waarvan geen enkele partiële afgeleide continu is.*

Oplossing. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(0) = 0$ en $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ voldoet. ■

Integratietheorie

Oplossingen van enkele oefeningen

1 Riemann integreerbaarheid

- (1.5) Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integreerbaar. Zij $s \in \mathbb{R}$ en definieer een functie $g : [a+s, b+s] \rightarrow \mathbb{R}$ door $g(t) = f(t-s)$. Toon aan dat g Riemann integreerbaar is en dat

$$\int_{a+s}^{b+s} g(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Oplossing. Kies $\varepsilon > 0$. Uit Lemma 1.10 volgt dat er een verdeling $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ van $[a, b]$ bestaat zodat $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$. Nu is $P' = (t_0 + s, t_1 + s, \dots, t_n + s)$ een verdeling van $[a+s, b+s]$. Bovendien hebben we dat $\sup_{t_j+s \leq x \leq t_{j+1}+s} g(x) = \sup_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} f(x)$ en ook dat $\inf_{t_j+s \leq x \leq t_{j+1}+s} g(x) = \inf_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} f(x)$ voor elke j , dus geldt er dat $\overline{S}(f, P) = \overline{S}(g, P')$ en $\underline{S}(f, P) = \underline{S}(g, P')$. Bijgevolg is $\overline{S}(g, P') - \underline{S}(g, P') < \varepsilon$. Daaruit volgt dan natuurlijk dat de functie g Riemann integreerbaar is (volgens Lemma 1.10), en $\int_{a+s}^{b+s} g(t) dt = \int_a^b f(t) dt$. ■

- (1.6) Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een stijgende functie. Bewijs dat f Riemann integreerbaar is.

Oplossing. Kies $\varepsilon > 0$. Kies n zodanig dat $n\varepsilon > (b-a)(f(b) - f(a))$ en definieer $\Delta = \frac{b-a}{n}$. Definieer $t_j = a + j\Delta$, dan is $P = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ een verdeling van $[a, b]$. Aangezien f stijgend is, geldt er dat $m_j = f(t_{j-1})$ en $M_j = f(t_j)$ voor alle j . Bijgevolg hebben we

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}) = \Delta \cdot \sum_{j=1}^n f(t_{j-1}) \quad \text{en} \quad \underline{S}(f, P) = \Delta \cdot \sum_{j=1}^n f(t_j).$$

Bijgevolg is

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \Delta \cdot (f(t_n) - f(t_0)) = \frac{b-a}{n} \cdot f(b) - f(a) < \varepsilon.$$

Het resultaat volgt dan uit Lemma 1.10. ■

- (1.8) Definieer de Riemann-functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ als volgt: $f(x) = 0$ als $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, en $f(x) = 1/q$ als $x = p/q$, waarbij p en q onderling ondeelbaar zijn. Bewijs dat f Riemann integreerbaar is.
- (1.9) Zoek twee Riemann-integreerbare functies $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zodat $f \circ g$ niet integreerbaar is.
- Oplossing.* Neem voor g de Riemann-functie uit de vorige opgave, en kies $f(0) = 0$ en $f(x) = 1$ als $x \neq 0$. Dan is $f \circ g$ de Dirichlet-functie, en die is niet integreerbaar. ■

2 Eigenschappen van de Riemann integraal

- (2.1) Zijn $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integreerbare functies. Bewijs dat $\max(f, g)$ en $\min(f, g)$ dan ook Riemann integreerbaar zijn. De functies $\max(f, g)$ en $\min(f, g)$ worden gedefinieerd als

volgt: $\max(f, g)(t) = \max\{f(t), g(t)\}$ en $\min(f, g)(t) = \min\{f(t), g(t)\}$ voor alle $t \in [a, b]$.

Oplossing. De functies $f + g$ en $f - g$ zijn integreerbaar. Bijgevolg is $|f - g|$ integreerbaar, en dus zijn ook $(f + g) + |f - g|$ en $(f + g) - |f - g|$ integreerbaar. De functies

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{en} \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

zijn dus Riemann integreerbaar, en daarmee zijn we klaar. ■

(2.2) Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie. Zijn de volgende uitspraken waar of fout?

(a) Er geldt dat f Riemann integreerbaar is als en slechts als f^2 dat is.

(b) Er geldt dat f Riemann integreerbaar is als en slechts als f^3 dat is.

Oplossing. De eerste uitspraak is fout. Immers, de functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = 1$ als $x \in \mathbb{Q}$ en $f(x) = -1$ als $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, is niet Riemann integreerbaar. Deze functie kan namelijk met behulp van een eenvoudige transformatie uit de Dirichlet-functie verkregen worden. Echter, de functie f^2 is dan een constante functie, en die is zeker integreerbaar.

De tweede uitspraak is juist. Immers, de functies $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ zijn continu. Als f integreerbaar is, dan is $f^3 = g \circ f$ dat dus ook (volgens Propositie 1.12), en als f^3 integreerbaar is, dan is $f = h \circ f^3$ dat ook. Daarmee zijn we klaar. ■

(2.6) Vind, indien mogelijk, een rij integreerbare functies $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f_n \rightarrow 0$ puntsgewijs en

(a) $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 1,$

(b) $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow +\infty,$

(c) $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 1$ en de rij (f_n) is begrensd.

Oplossing. Als $f_n(x) = n^2 x$ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 2n - n^2 x$ voor $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ en $f_n(x) = 0$ voor $\frac{2}{n} \leq x \leq 1$, dan convergeert de rij (f_n) puntsgewijs naar 0. De functies f_n zijn bovendien Riemann integreerbaar en er geldt steeds dat $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

Als $f_n(x) = n^3 x$ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 2n^2 - n^3 x$ voor $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ en $f_n(x) = 0$ voor alle x met $\frac{2}{n} \leq x \leq 1$, dan is er nog steeds aan de voorwaarden voldaan, en $\int_0^1 f_n(x) dx = n \rightarrow +\infty$. Er kan echter geen begrensde rij van functies (f_n) bestaan zodat $f_n \rightarrow 0$ en $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 1$. Dat volgt onmiddellijk uit Stelling 2.8 (de begrensde convergentiestelling). ■

(2.8) Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu en zij $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een positieve, Riemann integreerbare functie. Dan is fg integreerbaar. Toon aan dat er een $c \in [a, b]$ bestaat zodat

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

(2.9) Toon aan dat $\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Oplossing. Uit Propositie 2.2 en Propositie 2.3 volgt dat

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} \right| dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{x^2 + n^2} = \frac{1}{n} \arctan \frac{2\pi}{n}.$$

Uit het feit dat $\arctan(2\pi/n) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ volgt dan het resultaat. ■

(2.10) Definieer $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$ voor $x \in [0, 1]$ en $n \in \mathbb{N}_0$. Laat zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx.$$

Wat is de reden?

Oplossing. We hebben dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx^2} d(nx^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-e^{-nx^2} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n}) = 1.$$

We kunnen eenvoudig inzien dat de rij (S_n) convergeert naar de nulfunctie, dus hebben we dat

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = 0.$$

We mogen limiet en integraal niet verwisselen omdat de convergentie hier niet uniform is. ■

3 Het verband tussen afleiden en integreren

(3.1) Zoek een Riemann integreerbare functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zodat de functie

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

niet differentieerbaar is.

Oplossing. Kies $f(x) = 0$ als $0 \leq x \leq 1/2$ en $f(x) = 1$ als $1/2 < x \leq 1$. ■

(3.2) Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $v :]c, d[\rightarrow]a, b[$ differentieerbaar. Bewijs dat de functie

$$g :]c, d[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t) dt$$

differentieerbaar is in $]c, d[$ en bereken de afgeleide functie g' .

Oplossing. Omdat f continu is, is de functie

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

differentieerbaar. Bijgevolg is $g = F \circ v$ differentieerbaar in $]a, b[$, als samenstelling van twee differentieerbare functies. De kettingregel geeft $g'(x) = F'(v(x)) \cdot v'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x)$. ■

(3.3) *Bepaal alle continue functies $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat*

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Oplossing. Omdat f continu is, bestaat er een differentieerbare functie $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $F' = f$. Uit Propositie 3.4 volgt dan dat

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt = F(1) - F(x),$$

en bijgevolg is $F(x) = \frac{1}{2}(F(0) + F(1))$ constant. Omdat F differentieerbaar is in $]0, 1[$, hebben we dat $f(x) = F'(x) = 0$ voor alle $x \in]0, 1[$. Omdat f continu is, is ook $f(0) = f(1) = 0$. Bijgevolg is de enige dergelijke functie de nulfunctie. ■

(3.4) *Definieer $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(0) = 0$ en*

$$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

Toon aan dat f niet Riemann integreerbaar is, maar dat er in dit geval toch een differentieerbare functie $F :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ bestaat waarvoor geldt dat $F' = f$.

Oplossing. Omdat f niet begrensd is (in de buurt van 0) is f per definitie niet Riemann integreerbaar. Als we nu $F :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definiëren door $F(0) = 0$ en

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0),$$

dan geldt er dat F differentieerbaar is en $F' = f$. Immers, een eenvoudige berekening levert ons dat $F'(x) = f(x)$ als $x \neq 0$. We bewijzen nu nog dat $F'(0) = f(0) = 0$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en kies $\delta = \varepsilon$. Voor alle x met $0 < |x| < \delta$ geldt dan dat

$$\left| \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{F(x)}{x} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x^2} \right| |x| \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

Daaruit volgt dat $F'(0) = 0$, dus we zijn klaar. ■

(3.5) *Zij $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar. Definieer $M = \sup \{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$. Definieer dan een rij functies (f_n) door $f_0 = f$ en $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ voor alle $n \geq 0$ en $x \in [0, 1]$. Bewijs dat*

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{n!} x^n \leq \frac{M}{n!} \quad \text{voor alle } x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}_0.$$

Toon dan aan dat de rij (f_n) uniform convergeert.

Oplossing. We bewijzen de ongelijkheid met volledige inductie. We kunnen heel eenvoudig nagaan dat de ongelijkheid steeds geldt als $n = 1$ (en ook als $n = 0$). Veronderstel nu dat de ongelijkheid geldt voor alle natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan n . Dan geldt er dat

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |f_n(t)| dt \leq \int_0^x \frac{M}{n!} t^n dt = \frac{M}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}.$$

Bijgevolg geldt de ongelijkheid ook voor $n + 1$, en daarmee is het inductiebewijs voltooid. Hieruit volgt natuurlijk direct dat de rij (f_n) uniform convergeert naar de nulfunctie. ■

4 Oneigenlijke integralen

(4.7) Zij $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ een functie met $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Stel dat f Riemann integreerbaar is op elk gesloten en begrensd deelinterval van $[0, +\infty[$. Zijn de volgende uitspraken juist of fout?

(a) Als $L = 0$, dan is f oneigenlijk Riemann integreerbaar.

(b) Als f oneigenlijk Riemann integreerbaar is, dan is $L = 0$.

Oplossing. De eerste uitspraak is fout. Immers, de functie $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ voldoet aan de voorwaarden, en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, en toch is f niet oneigenlijk Riemann integreerbaar. De tweede uitspraak is juist. Stel dat f oneigenlijk integreerbaar is en dat $L \neq 0$. Veronderstel dat $L > 0$. (Als $L < 0$ verloopt het bewijs analoog.) Kies $m > 0$ zodat $|f(x) - L| < L/2$ voor alle $x > m$. Dan is $f(x) > L/2$ voor $x > m$, dus geldt voor alle $p > m$ dat

$$\int_0^p f(x) dx = \int_0^m f(x) dx + \int_m^p f(x) dx \geq \int_0^m f(x) dx + \int_m^p \frac{L}{2} dx = \int_0^m f(x) dx + (p-m)\frac{L}{2}.$$

Bijgevolg is

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p f(x) dx = \int_0^m f(x) dx + \lim_{p \rightarrow +\infty} (p-m)\frac{L}{2} = +\infty,$$

dus f is niet oneigenlijk integreerbaar. Dat is een contradictie, dus $L = 0$. ■

(4.12) Zij $p \in \mathbb{R}_0^+$. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$ divergeert als $p \leq 1$ en convergeert als $p > 1$.

Oplossing. Uit Opgave 4.10 volgt dat de reeks convergeert als en slechts als de limiet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \frac{dt}{t \cdot (\ln t)^p}$$

bestaat. Voor $p \neq 1$ hebben we dan dat

$$\int_2^x \frac{dt}{t \cdot (\ln t)^p} = \int_2^x \frac{d(\ln t)}{(\ln t)^p} = \left[\frac{(\ln t)^{1-p}}{1-p} \right]_2^x = \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}.$$

Welnu, het is duidelijk dat de limiet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}$$

bestaat als en slechts als $p > 1$. Bijgevolg is de reeks convergent als $p > 1$, divergent als $p < 1$.

Als $p = 1$, dan wordt de integraal

$$\int_2^x \frac{dt}{t \cdot \ln t} = \int_2^x \frac{d(\ln t)}{\ln t} = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2).$$

Omdat $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$ divergeert de reeks als $p = 1$. ■