Examen Analyse II
Tweede bachelor wiskunde
19 januari 2007

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- De groep die om 8 uur begint, blijft minstens tot 11 uur zitten (of tot de groep van 10 uur helemaal binnen is).
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een begrensde Borelmeetbare functie en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een integreerbare functie. Definieer de convolutie $f * g$ met dezelfde formule als in Propositie 4.23. Bewijs dat $f * g$ een continue functie is.

   Hint. Gebruik, zonder dat je dit hoeft te bewijzen, dat Lemma 4.35 ook geldt als $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *en als we de* 2*-norm vervangen door de* 1*-norm.*

2. Bewijs dat de functie

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : f(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} \sin(x)\, dx$$

   continu is. Bewijs dit eerst in de punten $y \neq 0$. Continuïteit in $y = 0$ is een stuk moeilijker. Voor dit laatste kan je de verandering van veranderlijken $x \mapsto x/y$ gebruiken.

3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de 2π-periodische functie die voldoet aan $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\pi}$ voor $x \in [0, 2\pi[$. Noteer met s_n de rij van partieelsommen van de Fourierreeks van f. Is $(s_n(0))_n$ een convergente rij? En zo ja, wat is de limiet? Verklaar je antwoord.

4. Voor welke waarden van $\alpha > 0$ en $\beta \in \mathbb{R}$ is de functie

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\mathrm{Bgtg}(x^\alpha)}{x^\beta}$$

   integreerbaar?

5. Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ en het vectorveld $\mathbf{V}$ gegeven door

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\ ,\ z \leq 1\}$$
$$\mathbf{V}(x, y, z) = (0, x, 0)$$