Examen Complexe Analyse
vrijdag 23 juni 2011, 14:00–18:00 uur

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 schriftelijke vragen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Het boek "Complex Variables" van R.B. Ash & W.P. Novinger mag gebruikt worden, evenals de extra beschikbaar gestelde nota's en eventueel eigen notities.
- Uitgewerkte oefeningen en ander materiaal uit de oefenzitting mag niet gebruikt worden.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Succes!

Vraag 1 Geldt de stelling van Rolle in het complexe vlak ?
Met andere woorden, is het volgende waar?

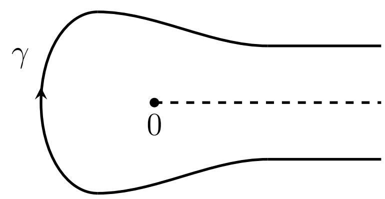
- *Zij* Ω *een gebied en* $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, *zodanig dat*

  $$[a, b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

  Als $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analytisch is met* $f(a) = f(b)$ *dan is er een* $c \in [a, b]$ *met*

  $$f'(c) = 0.$$

Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.



Vraag 2 Zoals bekend is $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ voor Re $z > 0$. Beschouw de functie f gegeven door de integraal

$$z \mapsto f(z) = \int_\gamma t^{z-1}e^{-t}dt$$

met γ een aan twee kanten onbegrensde contour zoals getoond in de figuur. Voor complexe t is $t \mapsto t^{z-1}$ gedefinieerd met een snede langs de positieve reële as, hetgeen wil zegggen dat

$$t^{z-1} = |t|^{z-1}e^{i(z-1)\arg(t)}, \qquad 0 < \arg t < 2\pi.$$

De integraal is convergent voor elke $z \in \mathbb{C}$ en definieert een gehele functie f op $\mathbb{C}$. Dit hoeft u niet te bewijzen.

(a) Laat zien dat voor Re $z > 0$ geldt dat

$$f(z) = -2ie^{\pi iz}\sin(\pi z)\Gamma(z).$$

(b) Wat zijn de nulpunten van f in het complexe vlak ?

[U mag gebruiken dat $\Gamma(z) \neq 0$ voor $z \in \mathbb{C}$ met Re $z > 0$.]

Vraag 3 (a) Beschouw een veelterm P met onderling verschillende nulpunten $z_1, \ldots, z_n$ en respectievelijke multipliciteiten $m_1, \ldots, m_n$. Neem aan dat $R > |z_j|$ voor alle $j = 1, \ldots, n$. Bereken de twee integralen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{zP'(z)}{P(z)}dz \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{P'(z)}{zP(z)}dz$$

en geef een zo eenvoudig mogelijke uitdrukking in termen van de nulpunten van P en hun multipliciteiten.

(b) Neem aan dat f analytisch is in $D(0, 1+\varepsilon)$ voor zekere $\varepsilon > 0$ en dat $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$. Bewijs dat de vergelijking

$$f(z) = z^n$$

precies n oplossingen heeft in de schijf $D(0, 1)$. [Oplossingen worden geteld naar gelang hun multipliciteit.]

Vraag 4 Zij Ω gegeven door

$$\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < R,\ y > 0\}$$

met $R > 0$.

(a) Wat is het beeld van Ω onder de afbeelding $z \mapsto e^{iz}$?

(b) Geef een conforme afbeelding van Ω naar het bovenhalfvlak $\mathbb{C}^+$.

(c) Vind een functie $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die continu is op $\overline{\Omega} \setminus \{(0,0)\}$, harmonisch is in Ω, en die voldoet aan

$$\begin{cases} u(0,y) = 1 & \text{voor } y > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{voor } 0 < x < R, \\ u(R,y) = 0 & \text{voor } y > 0. \end{cases}$$

Het volstaat om u uit te drukken in de conforme afbeelding van onderdeel (b).