

Differentiaalvergelijkingen

19 januari 2015

Mondelinge vraag over deel 1

We beschouwen de volgende differentiaalvergelijking op een interval I , waarvan y_1 en y_2 twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn.

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

1) Stel dat y_0 ook een oplossing is van de vergelijking op I . Bewijs dat de Wronskiaan

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y'_0 & y'_1 & y'_2 \\ y''_0 & y''_1 & y''_2 \end{vmatrix}$$

identiek nul is op I .

2) Vindt een differentiaalvergelijking waarvan $y_1(x) = x$ en $y_2(x) = \ln(x)$ oplossingen zijn op $(0, +\infty)$.
Bijvraagjes: Welke punten zijn singulier voor de vergelijking in 2)? Welke zijn daarvan regulier en welke zijn niet regulier? Leg uit.

Schriftelijke vraag over deel 1

Beschouw de twee differentiaalvergelijkingen

$$x^3 y'' + xy' - 2x = 0$$

$$x^2 y'' - y' + 2 = 0$$

- 1) Wat is de aard van het punt $x = 0$ in beide vergelijkingen?
- 2) Toon aan dat de eerste vergelijking geen oplossing als Frobeniusreeks heeft maar de tweede wel.
- 3) Bereken de Frobeniusreeks oplossing van de tweede vergelijking.
- 4) Reduceer de orde van de tweede differentiaalvergelijking met behulp van de oplossing gevonden in 3).

Mondelinge vraag over deel 2

We beschouwen een trillende staaf van lengte L dat ingeklemd is in de twee uiteinden. De golfvergelijking die eraan gekoppelt is is de volgende:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

met randvoorwaarden $u(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = u(L, t) = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0$.

- 1) Leg uit waarom deze randvoorwaarden worden opgelegd.
- 2) Bepaal de vergelijking voor de frequenties van de staande golven in de staaf.
- 3) Hoe zou je deze frequenties grafisch bepalen?
- 4) Kan je een benadering geven voor de waarde van de hoge frequenties?

Schriftelijke vraag over deel 2

We bestuderen het volgende eigenwaarde probleem:

$$-y'' + 2y' = \lambda y$$

met randvoorwaarden $y(0) = y(L) = 0$.

- 1) Zet deze vergelijking om in de standaardvorm van een Sturm-Liouvilleprobleem. Is dit een regulier of een singulier Sturm-Liouvilleprobleem?
- 2) Wat is het scalair product voor deze operator?
- 3) Hoe bepaal je de eigenwaarden van de operator? Vindt ook de eigenfuncties y_n die erbij horen.
- 4) Toon expliciet aan dat er oneindig veel eigenwaarden zijn.
- 5) Hoe bepaal je de coëfficiënten van de lineaire combinatie van eigenfuncties

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n?$$