

Pauli's ontbijtbuffet

Chef Kwantum: Cookende op die mondelinge vragen
&
Sous-Chef Kwantum: Cookende op die schriftelijke vragen

24 juni 2025 VM

Vraag 1: Mondeling: Ja/Nee (4 pt)

1. Voor een random fysisch correcte Ψ , geldt: $H\Psi : E\Psi$?
2. Voor een gegeven potentiaal $V(x) + C$, $C \in R$. Heeft deze hamiltoniaan dezelfde toestand als $c = 0$ en als $c \neq 0$.
Bijvraag: Heeft de toestand voor $c \neq 0$ dezelfde energie als $c = 0$?
3. Voor N onderscheidbare fermionen, met als enige vrijheidsgraad de spin. Wat is de dimensie van de bijbehorende toestandruimte?
4. Dezelfde vraag voor N ononderscheidbare fermionen.

Vraag 2: Commutatoren (5 pt)

1. Toon aan dat de commutator $[\hat{H}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{im}\hat{p}_x$. Toon ook aan dat $[\hat{x}, [\hat{H}, \hat{x}]] = \frac{\hbar^2}{m}$
2. Toon aan dat voor een algemene operator \hat{A} horende bij een observable A geldt, dat: $[\hat{p}_x, \hat{A}] = \frac{\hbar}{i} \frac{d\hat{A}}{dx}$
3. Bereken $\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt}$ en $\frac{d\langle \hat{p}_x \rangle}{dt}$.

Vraag 3: Identieke deeltjes (4 pt)

Twee deeltjes hebben als mogelijke **RUIMTELIJKE** toestanden $\psi_a(x), \psi_b(x), \psi_c(x)$

1. Hoeveel mogelijke golffuncties zijn er als deze deeltjes onderscheidbaar zijn?
2. Hoeveel mogelijke golffuncties zijn er als deze spin-1/2-deeltjes zijn?¹

Er zijn nu drie deeltjes met als mogelijke ruimtelijke toestanden $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$

1. Hoeveel mogelijke golffuncties zijn er als deze deeltjes onderscheidbaar zijn?
2. Hoeveel mogelijke golffuncties zijn er als deze spin-1/2-deeltjes zijn?

Vraag 4: Tijdsonafhankelijke Perturbaties (3 pt)

Beschouw de infinite square well met als potentiaal:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < L \\ \infty & \text{elders} \end{cases}$$

De oplossingen hiervan zijn van de vorm:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

We gooien hier een perturbatie op van de vorm:

$$H' = V_0 \left(x - \frac{L}{2}\right)^2$$

Bereken nu de eerste-orde correctie op de energie. Hiervoor kunnen de volgende integralen nuttig zijn (*Dit was gegeven op het examen, maar wij zijn echt te tam om ze op te schrijven. Dus zoek ze op.*):

$$\int x \sin(ax)$$

$$\int x \sin^2(ax)$$

$$\int x^2 \sin^2(ax)$$

¹Dit zijn echte fysische fermionen

Vraag 5: Tijdsafhankelijke Perturbaties & Spin (4 pt)

We beschouwen een spin-1/2 deeltjessysteem met als interactie-hamiltoniaan:

$$H(t) = a(t)\hat{L} \cdot \hat{S}$$

De functie $a(t)$ is eindig integreerbaar in de tijd, ook $a(-\infty) = a(+\infty) = 0$. Het product $\hat{L} \cdot \hat{S}$ kan geschreven worden als:

$$\hat{L} \cdot \hat{S} = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In de basis $\{|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle\}$. Het deeltje is initieel in toestand $|\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$.

1. Toon aan dat de kans om naar toestand $|-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ niet nul is en enkel afhangt van de integraal:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t') dt'$$

2. Wat is de kans om van toestand $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ of $|-\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle$ naar een andere toestand te gaan.
3. Hoe zou je antwoord veranderen indien je hogere orde perturbaties gebruikt?

Oplossingen

Wij hebben echt geen zin meer om hier meer moeite in te steken, dus dit zijn snelle verklaringen. Sorry daarvoor.

Vraag 1

1. Nee, je kan een Ψ hebben die een lineaire combinatie is van meerdere energie-eigenfuncties en dan geldt dit niet meer.
2. Schrijf hamiltoniaan als $H = H_0 + C$ met H_0 de gekende hamiltoniaan. Gebruik de lineariteit om dan uiteindelijk de termen $c|\psi\rangle$ af te trekken. Dan zie je dat dit ook eigentoestand is van H_0
3. 2^N : N deeltjes, elk met spin up of down
4. Hier is het belangrijk om Pauli exclusie in te zien, dus je hebt max. 2 deeltjes: dimensie is 1. (singlet)

Vraag 2

1. Zie cursus en oefenzittingen
2. Idem
3. Gebruik Ehrenfest

Vraag 3

1. 3^N ruimtelijke golffuncties, en 2^N spin $-i$ $9 * 4 = 36$
2. Zie dat je singlet en triplet states gebruikt, gebruik symmetrieën om opties uit te sluiten.
3. 2^N ruimtelijke, 2^N spin $-i$ $8 * 8 = 64$
4. Denk aan Pauli exclusie, gebruik ook de symmetrieën. Er zijn dan 8 opties.

Vraag 4

Bereken $E_n^{(1)}$ met het inproduct. Dit is een kutintegraal. Merk op dat het niet degeneraat is.

Vraag 5

1. Volg de cursus en les om $|c_i|$ te bepalen en zo de kans te berekenen.
2. Dit is nul want de matrixelementen zijn 0 ($H_{ij} = 0$)
3. Dit zal altijd nul blijven