Examen differentiaalvergelijkingen 18/01/2013 (namiddag)

Theorie, deel 1, vraag 1

Gegeven een twee verbonden vaten gevuld met zout opgelost in water. Het eerste vat bevat $30l$ en het tweede $20l$. Er is een toevoer van zoutwater met $100g/l$ met een debiet van $1,5l/min$ voor het eerste vat. Voor de tweede is er een toevoer $250g/l$ aan $1l/min$. Er zijn twee ondelinge verbindingen. De eerste sluist $3l/min$ van het grote naar het kleine vat over. De tweede gaat in de omgekeerde richting met $1,5l/min$. Er is dan ook nog een afvoer bij het tweede vat van $2,5l/min$. (Er staat een figuur bij.)

- Stel het bijhorende stelsel aan differentiaalvergelijking op.
- Welke zijn de evenwichtspunten bij het systeem? (Bijvraag: Welk gedrag vertonen ze?)
- Waar evolueert het systeem naar toe?
- (Deze vraag stond er eerst, maar is tijdens het examen weggehaald: Welke de twee concentraties convergeert het snelst naar zijn eindpunt toe?)

Theorie, deel 1, vraag 2

Beschouw een derde orde differentiaalvergelijking met als algemene oplossing

$$c_1 J_2 + c_2 Y_2 + \frac{c_3}{x^2}$$

met J_2 de Besselfunctie van eerste soort en Y_2 die van tweede soort.

- Bepaal de differentiaalvergelijking.
- Wat is de indiciële vergelijking van deze vergelijking?

Theorie, deel 2, vraag 1

(Hier stond nog extra uitleg over de des betreffende warmtevergelijking.)

1. Leidt de continuïteitsvergelijking voor de warmte op een schijf met binnenstraal R_0 en buitenstraal R_1 af.
2. Gebruik de wet van Newton om dat om te zetten naar een warmtevergelijking.
3. Bereken deze vergelijking.

Theorie, deel 2, vraag 2

De Newtoniaanse gravitatiepotentiaal Φ opgeroepen door een massaverdeling $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ die voldoende snel naar nul gaat op oneindig is de oplossing van de vergelijijng van Poisson

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho$$

met de normalisatieconstante $\Phi = 0$ op oneindig. Hierbij is G de universele gravitatieconstante $G \approx 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{N}m^2\mathrm{k}g^{-2}$.

1. Bepaal de oplossing voor het geval van een rotatie-invariante massaverdeling.

2. Toon in het bijzonder aan dat de potentiaal op een afstand r_0 van de oorsprong gelijk is aan de potentiaal opgeroepen op een afstand r_0 door de totale massa aanwezig in het gebied $r \leq r_0$ te concentreren in de oorsprong.

Oefening 1

Beschouw voor $\alpha \in \mathbb{R}$ het stelsel

$$\begin{cases} x' = & y + \alpha x \left(x^2 + y^2\right) \\ y' = & -x + \alpha y \left(x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

- Laat zien dat $(0,0)$ het enige evenwichtspunt is. Lineariseer het stelsel rond het evenwichtspunt.
- Leid een differentiaalvergelijking af voor $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.
- Is het evenwichtspunt stabiel of onstabiel? Het antwoord mag afhangen van α.

Oefening 2

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$xy'' + \alpha y' - y = 0$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$. We zoeken nu een oplossing $y(x)$ in de vorml van een Laplacegetransformeerde

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-tx} dt$$

van een nog onbekende functie $f(t)$.

1. Neem aan dat f continu en afleidbaar op $[0, \infty[$ is (ook op $t = 0$) en van exponentiële orde is. Laat zien dat dan volgt dat f aan de volgende eerste orde differentiaalvergelijking voldoet

$$t^2 f'(t) + (2 - \alpha)\, tf(t) - f(t) = 0.$$

2. Los de differentiaalvergelijking voor f op.

3. Voldoet dre oplossing $f(t)$die u gevonden hebt in (b) inderdaad aan de aannamen uit onderdeel (a) dat f continu en afleidbaar is op $[0, \infty[$ en dat f van exponentiële orde is? Wat ius de exponentiële orde? Hangt uw antwoord af van α?