# Examen Juni 2020

Prof = Professor Pavlik

June 2020

# Fysische Thermodynamica

## 1 De entropie van een gekookt ei

Deze ochtend wou ik als ontbijt een gekookt ei eten. Deze was een perfecte sfeer met diameter 6cm. Deze ging ik dan in 1,5L water koken. Het water had begin temperatuur $15C$ en heeft als warmte capaciteit 4,186$\frac{kJ}{kg \cdot K}$. Eens het water kookte op $100C$ deed ik het ei dat op $10C$ was in het water. De ei had ook een uniforme dichtheid van $1031\frac{kg}{m^3}$ met een specifieke warmte van $3,4\frac{kJ}{kg \cdot K}$. De ei ondergaat (bij benadering) een fase overgang van ongekookt naar gekoot op $75C$ en de latente warmte is $2000\frac{kJ}{kg}$. Een ei is perfect gekookt als het net na fase overgang eruit wordt gehaald.

(a) Om na te gaan wanneer de faseovergang voorbij is, meet ik met een chique apparaat de temperatuur van het ei. Schets de temperatuur curve en geef aan op welk punt ik net het ei uit het water haalde.

(b) Hoeveel warmte heb ik aan het ei-water systeem toegevoegd om mijn ei te koken?

(c) Hoeveel entropie heb ik geproduceerd?

## 2 De zon als warmte motor

Bij de stirling motor wordt de zon gebruikt om de werkende substantie (in dit geval een ideale gas) op te warmen. Vervolgens koelt dit gas af in de schaduw achter een scherm (zie figuur).
De cyclus van een stirling motor bestaat uit 2 isothermen bij temperatuur $T_h = 380K$ en $T_c = 120K$, verbonden door 2 isochoren bij Volume $V_1$ en $V_2$.

(a) Schets de $PV$ diagram en de $ST$ diagram voor deze cyclus.

(b) Leid de efficiëntie van het systeem af en interpreteer het resultaat

(c) door meer zonlicht te focussen kunnen we $T_h$ verhogen. Wat is de theoretisch bovengrens van de te behalen temperatuur?

(d) De vermogen van de motor hangt af van hoe snel gas kan afkoelen. Het afkoelen gebeurt puur door straling, het uitgestralen vermogen is gegeven door de wet van Stefan-Boltlzmann:

$$P = \sigma A T^4$$

Beredeneer aan de hand van deze wet hoe een koel element eruit moet zien.

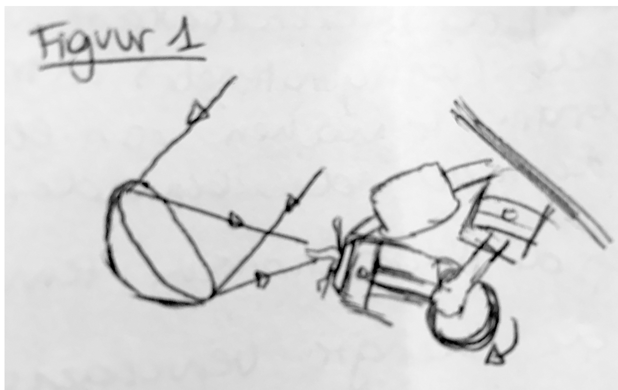


Figure 1: Een stirling motor op de maan. Straling van de zon wordt via een lens gefocust om zo een gas op te warmen. Dit gas koelt vervolgens af in de schaduw achter een scherm.

## 3 Evenwicht en Stabiliteit

(a) Toon aan dat voor een gesloten systeem, in contact met een warmte bad bij temperatuur $T$ en zonder arbeidsuitwisseling met het bad, de Helmholtz vrije energie geminimaliseerd wordt bij evenwicht.

(b) Bewijs dat in zulk systeem bij evenwicht zowel de druk als chemische potentiaal uniform zijn doorheen het systeem. *Hint: om te bewijzen kan je het systeem op delen in 2 gescheiden delen waartussen deeltjes kunnen uitgewisseld worden. Beschouw dan kleine uitwisselingen van vrije energie. (deze hint stond letterlijk op het examen*

# Statistische Thermodynamica

## 4 Einstein model voor een vaste stof I

In 1907 bedacht Albert Einstein een nieuw model voor een vaste stof dat voor het eerst in staat was kwalitatief het correcte gedrag van de warmte capaciteit bij lage temp te beschrijven. Het model beschrijft een vaste stof als een rooster atomen en is gebaseerd op twee aannames:

- Elk atoom in het rooster is een beschreven door drie onafhankelijk kwantum harmonisch oscillatoren, één voor elke vrijheidsgraad.
- Alle atomen oscilleren met dezelfde frequentie.

In deze oef gaan wij Einstein achterna en zullen we de warmte capaciteit bij constante volume $C_V$, berekenen, door gebruik te maken van verschillende statistische ensembles. We beschouwen een materiaal opgebouwd uit $N \gg 1$ atomen. Elk atoom heeft 3 vrijheidsgraden dus het systeem wordt beschreven door $3N$ kwantum harmonische oscillatoren. De mogelijke energieniveaus voor elk van deze oscillatoren is gegeven door

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2} \text{met} n \in N.$$

In deze vergelijking loopt $n$ van 0 naar oneindig en duidt het energie niveau van een enkele kwantum harmonische oscillator aan. $\omega$ is de frequentie van de oscillatoren en $\hbar$ is de constante van Planck. Alle energieniveaus zijn gelijk gespreid dus we kunnen het kwantum van energie definiëren als

$$= \hbar\omega.$$

Dit is de kleinste hoeveelheid waarmee de energie van een kwantum harmonische oscillator kan toenemen. Laat ons eerst het materiaal beschouwen als een geïsoleerd systeem geëxciteerd met $k$ energie kwanta. De totale energie van de vaste stof is dus $E = (k + \frac{3N}{2}) \cdot \epsilon$ waar $0 \leq k \leq \infty$.

(a) Bereken de multipliciteit $\Omega(E, N)$. Met andere woorden, hoeveel microtoestanden horen er bij de macrotoestand met energie $E$ voor $N$ atomen?

(b) Bereken de (configurationele) entropie van dit systeem en vereenvoudig deze formule door gebruik te maken van een benadering voor $N \gg 1$ en $k \gg 1$. *Hint (gegeven): denk aan de benadering van Stirling* $N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N$ *voor* $N \gg 1$.

(c) Bereken de microcanonische temperatuur van dit systeem als functie van $E$ en $N$.

(d) Druk de energie vervolgens uit als functie van $T$ en $N$.

## 5 Einstein Model voor een vaste stof II

Beschouw vervolgens hetzelfde systeem maar nu in contact met een warmte bad bij temperatuur $T$.

(a) Vind de canonische partitie functie van dit systeem $Z(N, T)$

(b) Bereken de gemiddelde interne energie als functie van $T$ en $N$ en vergelijk met de formule gevonden in het microcanonisch ensemble. Verklaar de verschillen en/of gelijkenissen in de thermodynamische limiet.

(c) Berken de warmte capaciteit van deze vaste stof.

(d) Hoe gedraagt deze warmte capaciteit zich bij erg hoge en erg lage temperaturen? Verklaar je antwoord.