Examen Complexe functies 17 januari 2020

Het examen was net zoals bij Elektrodynamica een all you can carry examen.

Bij vraag 1 tot en met 4 moet er geen uitleg staan, maar enkel je einduitkomst.

vraag 1

Geef alle mogelijke waarden van $\mathrm{i}^{\sqrt{2\mathrm{i}}}$

vraag 2

Geef alle mogelijke oplossingen van $z^4 = 8 + 8i\sqrt{3}$ en schrijf in de vorm $z = r^{i\theta}$

Memo: Eigenlijk had W hier eerst $\sqrt{2}$ gezet, maar de uitkomst was mooier met $\sqrt{3}$. Hij verwacht wel dat je het ook met $\sqrt{2}$ kan

Vraag 3

Geef het domein waarop de volgende functies analytisch zijn

$f_1(z) = \mathrm{Re}\ z + \mathrm{Im}\ z$
$f_2(z) = i\mathrm{Re}\ z + \mathrm{Im}\ z$
$f_3(z) = re^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}}$ met $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \geq 0$

Vraag 4

Geef type singulariteit(pool van n-de orde + geef de orde, verwijderbaar, essentieel, of niet-geïsoleerd) van de volgende functies

- $f(z) = \frac{\cos^2(z-\frac{\pi}{2})}{z}$ in $z = 0$

Memo: de z in de noemer kan ook een 2 zijn, maar mijn 2 en z lijken ongezond hard op elkaar dus sorry voor enige verwarring

- $f(z) = \frac{1}{z-\sin(\sin(z))}$ in $z = 0$
- $f(z) = \frac{e^{z^{-2}}}{e^{z^2}}$ in $z = 0$
- $f(z) = (z^2 + 1)g(z)$ in $z = 0$
  waarvoor $g(z)$ een essentiële singulariteit heeft in $z = 0$
- $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z = 0$
- $f(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ met $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z = 0$

Vraag 5

Bereken $\oint_C \mathrm{f(z)dz}$ met C de eenheidscirkel tegenwijzerzin

1) $\mathrm{f(z)} \ = \begin{cases} 0 \text{ Re z } & \leq 0 \\ 1 \text{ Re z } & \geq 0 \end{cases}$

2) $\mathrm{f(z)} \ = |\mathrm{z}|^3$

3) $\mathrm{f(z)} \ = \frac{1}{\tan^2(\mathrm{z})}$

4) $\mathrm{f(z)} \ = \mathrm{z}^3 - 2$

5) $\mathrm{f(z)} \ = \frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{z}^2-1}$

6) $\mathrm{f(z)} \ = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{z}}}\sin(\mathrm{z})$

7) $\mathrm{f(z)} \ = \log(\mathrm{r}) + \mathrm{i}\theta$ met $\mathrm{z} = \mathrm{re}^{\mathrm{i}\theta}$en $\theta \in [0, 2\pi[$ Merk op dat dit een branch is van log(z)

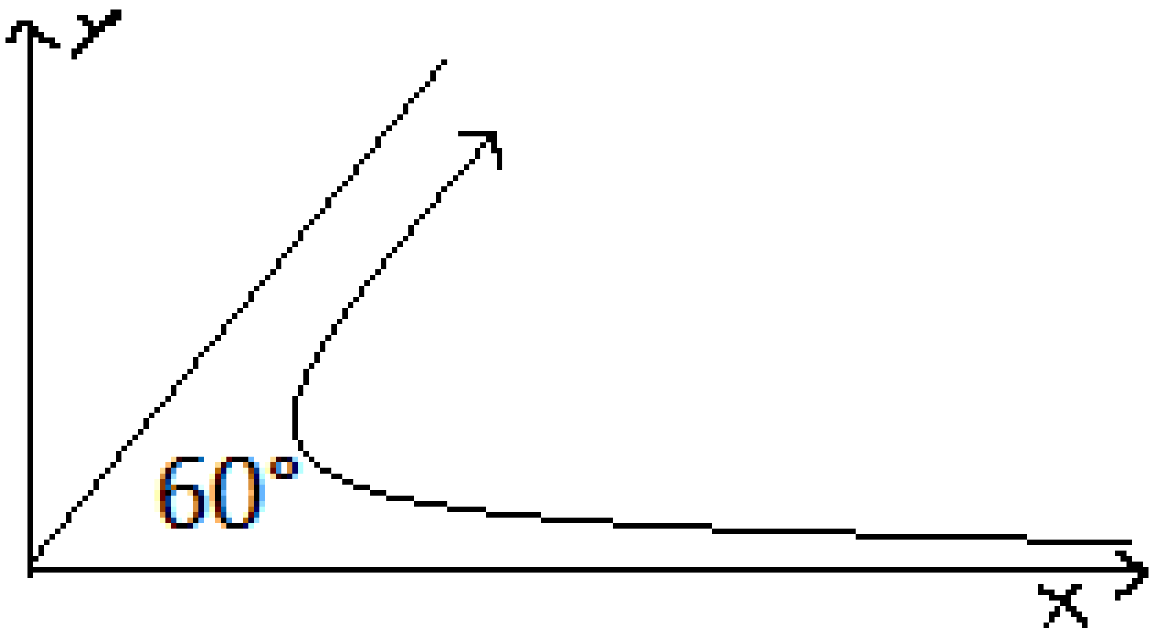
Vraag 6

Bereken

$$\oint_R \frac{1}{2\mathrm{z}^3 - 1}\mathrm{dz}$$

Waarbij R de rechte $\mathrm{i} + \mathbb{R}$ is, doorlopend van boven naar onder

Vraag 7
Bepaal een "stroompotentiaal" ϕ en stroomveld $v = \nabla\phi$ voor een 2D stroming zoals figuur.1
Bereken dan de groote van het stroomveld als functie van positie aan de horizontale rand: (bereken $v(x, y = 0)$als functie van $x > 0$)



Figuur 1: de x-as en de schuine halfrechte vormen de rand van een vast object. Tussen deze rechten bevindt zich een vloeistof die stroomt in de richting aangegeven door de stroomlijn