Examen Analyse II januari 2024 – 2025

Datum	20 januari 2025
Beschikbare examentijd	3 uur (4 uur met faciliteiten)
Beschikbare hulpmiddelen	Alle modeloplossingen, uitgewerkte oefeningen, de cursus en eventueel cursussen van andere bachelorvakken.
Professor	Stefaan Vaes

NB: de aandachtige lezer merkt op dat de hieronder gegeven puntentelling in totaal op achttien punten uitkomt; de resterende twee punten voor het vak komen voort uit het al dan niet deftig gemaakt hebben van de huistaken.

Vraag 1 (4pt.)

Zij $\alpha > 0$ en zij $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie met $\varphi(0) = 0$ en $|\varphi(t)| = \Theta(|t|^\alpha)$ als $t \to 0$. Zij nu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \varphi(xy)$.

(a) Voor welke waarden van $\alpha > 0$ is f partieel afleidbaar in $(0, 0)$?

(b) Voor welke waarden van $\alpha > 0$ is f totaal afleidbaar in $(0, 0)$?

Vraag 2 (7pt.)

Zij $\alpha, \beta > 0$. Noem $F :]0, +\infty[\to [0, +\infty] : x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^\alpha y^\beta} \, \mathrm{d}y$.

(a) Welke voorwaarden op $\alpha, \beta > 0$ kun je stellen zodat $F(x) < +\infty$ voor alle $x \in \mathbb{R}_0^+$?

(b) Stel $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$. Bewijs dat F een continue functie is.

(c) Stel nu dat $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$. Bepaal $\lim_{x \to 0} F(x)$.

(d) Stel $\alpha > 0, 0 < \beta < 1, \alpha + \beta > 1$. Bepaal $\gamma > 0$ zodat $F(x) = \Theta\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$.

Hint: de verandering van veranderlijken $y = xz$ kan nuttig zijn.

Vraag 3 (7pt.)

Zij $0 < \alpha \leq 1$, $M > 0$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodische functie die α-Höldercontinu is, dus zodat $\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| < M|x - y|^\alpha$. Merk op dat hieruit in het bijzonder volgt dat f continu is.

(a) Definieer voor elke $x \in \mathbb{R}$ de functie

$$F_x : [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : y \mapsto \frac{f(x + y) - f(x)}{\sin(\frac{y}{2})}.$$

Bewijs dat F_x voor elke x integreerbaar is.

(b) Bewijs dat $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} \|F_x - F_a\|_1 = 0$.

Uit deze twee kun je een veralgemeende versie van het lemma van Riemann-Lebesgue afleiden, namelijk de volgende: op elk gesloten begrensd deelinterval $[c, d]$ van $\mathbb{R}$ geldt dat

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} F_x(y) \sin(\lambda y) \, \mathrm{d}y = 0 \text{ uniform in } [c, d]$$

Je hoeft dit niet te bewijzen. Gebruik dit feit om de volgende oefening te maken.

(c) Noteer met s_n de Fourierpartieelsommen van f. Bewijs dat s_n uniform naar f convergeert.