

ANALYSE II

(06/09/2012 (9u-13u))

- 1 Leg nauwkeurig de analogie uit tussen de sommatiemethode van Féjer voor Fourierreeksen en het gebruik van de functie g_A (gedefinieerd in Voorbeeld 4.40) in de theorie van Fouriertransformaties.
- 2 We noemen twee normen $x \mapsto \|x\|_a$ en $x \mapsto \|x\|_b$ op een vectorruimte X *equivalent* als er een positief getal $M > 0$ bestaat zodanig dat $\|x\|_a \leq M \|x\|_b$ en $\|x\|_b \leq M \|x\|_a$ voor alle $x \in X$. Geef twee niet equivalente normen op de vectorruimte $C([0, 1], \mathbb{C})$ van de continue functies van het interval $[0, 1]$ naar \mathbb{C} . Bewijs je antwoord nauwkeurig.
- 3 Definieer de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^3 - y, y^2)$. Beantwoord volgende vragen en bewijs telkens je antwoord.
- a) Rond welke punten van \mathbb{R}^2 heeft f een lokaal, totaal afleidbaar invers?
 - b) Rond welke punten van \mathbb{R}^2 heeft f een lokaal, continu invers?
- 4 Toon aan dat de functie

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(y) e^{-xy} dy$$

goed gedefinieerd is en willekeurig vaak afleidbaar is. Geef een formule voor de n -de afgeleide en bewijs deze formule.

- 5 Geef een voorbeeld van een integreerbare functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvan de Fouriertransformatie \hat{f} niet langer integreerbaar is. Bewijs je antwoord nauwkeurig.

◇ ◇ ◇