Examen Algebra I januari 2023

17 januari 2023

1 Theorie

1.1 Vraag 1

(a) Zij $G, \cdot$ een groep en A en B deelgroepen. Bewijs:

$$AB \text{ is een deelgroep } \Rightarrow AB = BA$$

(b) Zij D een deelgroep van $R, +$. Bewijs dat

$$\bar{\cdot} : R/D \times R/D \to R/D : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x}\bar{y}$$

goed gedefinieerd is als en slechts als D een ideaal is van R.

1.2 Vraag 2

Bewijs de transitiviteit van algebraïsch zijn. Meer precies: zij $K \subset L \subset E$ velden en stel dat $K \subset L$ en $L \subset E$ algebraische velduitbreidingen zijn. Toon aan dat $K \subset E$ algebraisch is.
Hint: Neem een niet-triviale veelterm en construeer hieruit een gepaste keten uitbreidingen.

2 Oefeningen

2.1 Vraag 1

(a) Zij $\phi : S_n \to \{-1, 1\}$ een morfisme. Bewijs: ofwel zal $\phi(\sigma) = 1$ voor alle permutaties, ofwel zal $\phi(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ voor alle permutaties.

(b) Stel G een eindige groep met oneven orde. Bepaal alle morfismen $S_n \to G$.

(Hint: transposities)

2.2 Vraag 2

Een Noetherse ring is een ring zodat voor elke aftelbaar lange keten van idealen $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots \subset I_n$ er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $I_n = I_{n+1} = \ldots$

(a) Bewijs dat R Noethers is als en slechts als elk ideaal eindig voortgebracht is. (Dat wil zeggen dat $I = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ met alle $f_i \in R$ voor elk ideaal I)
Hint: Lemma 2.4.19

(b) Bewijs dat een quotiëntring van een Noetherse ring opnieuw Noethers is.

2.3 Vraag 3

$$R = \frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{(5, XY - Y + 6, Y - X^2)}$$

(a) Bewijs nauwkeurig dat R een veld is.

(b) Met welk 'gekend' veld is R isomorf?

(c) Hoeveel wortels heeft $T^3 + T + 1$ in R?

(d) Bonus: Hoeveel wortels heeft $T + \overline{X}$ in R?

2.4 Vraag 4

Zij $a \in \mathbb{C}$. Noteer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bepaal de karakteristieke en minimale veelterm van A afhankelijk van de waarde van a.