

# ALGEBRAÏSCHE STRUCTUREN

(27/06/2012 (13u-17u))

## THEORIE

- 1 Bewijs dat voor  $n, m \in \mathbb{N}_0$  relatief priem,  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$ .
- 2 Zij  $A$  de Gramm-matrix voor  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ten opzichte van basis  $\mathcal{V}$  en  $B$  de Gramm-matrix voor  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ten opzichte van basis  $\mathcal{W}$ .  
Geef en bewijs de formule voor  $B$  in functie van  $A$  en  $\text{Id}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ .

## OEFENINGEN

- 1 Zij  $p$  priem en  $G$  een abelse groep met minstens een element met orde  $p$ . Stel

$$\alpha = |\{g \in G \mid \text{orde}(g) = p\}|$$

- (a) Bereken  $\alpha$  voor  $p = 3$  en  $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$
- (b) Bewijs dat  $\alpha \equiv -1 \pmod{p}$ , in het geval  $\alpha$  een eindige waarde aanneemt.  
*Hint: beschouw de afbeelding  $\varphi : G \rightarrow G : x \mapsto x^p$ .*

- 2 Bereken

$$3^{999^{100}} + 7^{960^{961}} \pmod{225}.$$

- 3 Zij  $V$  een  $n$ -dimensionale vectorruimte over een veld  $K$  en  $\alpha, \beta \in V^*$ . Bewijs dat

$$\text{Ker } \alpha \subseteq \text{Ker } \beta \iff \exists k \in K \text{ zo dat } \beta = k \cdot \alpha.$$

*Hint: ga na welke dimensies  $\text{Ker } \alpha$  en  $\text{Ker } \beta$  kunnen hebben.*