Algebraïsche Structuren

(27/06/2010 (13u-17u))

Theorie

$\boxed{1}$ (a) Geef de Stelling van Lagrange. Je hoeft dit niet te bewijzen.

(b) Zij $G, *$ een eindige groep en x een element van G. Bewijs dat de orde van x een deler is van de orde van G.

Bijvraagjes:

- *Wat is het invers van $x^2 \in \langle x \rangle$?*
- *Bestaat er een oneindige groep waarin er een element is met orde 2?*
- *Bestaat er een oneindige groep waarin elk element orde 2 heeft?*

$\boxed{2}$ Zij V een eindige vectorruimte over een veld K met een karakteristiek niet gelijk aan twee. Bewijs dat er een kanoniek isomorfisme bestaat tussen V en $(V^*)^*$.
Bijvraagjes:

- *Geldt dit bewijs ook voor oneindigdimensionale vectorruimten? Verklaar je antwoord en leg uit waar het eventueel misloopt.*

Oefeningen

$\boxed{1}$ Bepaal de rest bij deling van 2008! door 2011 met gegeven dat 2011 priem is.

$\boxed{2}$ Bepaal $55^{62} - 2 \cdot 13^{62} + 41^{62}$ mod 182.

$\boxed{3}$ Zij $G, *$ een eindige groep en zij $\theta : G \to G$ een groepsmorfisme waarvoor geldt dat $\theta^2 = \theta \circ \theta = \mathrm{Id}$, maar voor alle $g \in G$ met $g \neq e_G$ geldt dat $\theta(g) \neq g$.

(a) Toon aan dat het groepsmorfisme $\varphi : G \to G : g \mapsto \varphi(g) = g^{-1} * \theta(g)$ bijectief is.

(b) Toon aan dat voor alle $g \in G$ geldt dat $\theta(g) = g^{-1}$.

$\boxed{4}$ Zij $V = K^{2\times 2}$ een symmetrisch billineaire ruimte over een veld K met karakteristiek niet 2 met volgende vorm

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V : (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \mathrm{Spoor}(AB).$$

Hierbij definiëren we het spoor als $\mathrm{Spoor}(M) = M_{11} + M_{22}$ voor alle
$M = (M_{ij})_{i,j=1}^2 \in V$.

(a) Bepaal een basis $\mathcal{V}$ van V zo dat de matrix van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ten opzichte van $\mathcal{V}$ een symmetrische matrix is.

(b) Kan je voor $K = \mathbb{Z}_{17}$ een basis $\mathcal{W}$ vinden, zo dat de matrix van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ten opzichte van $\mathcal{W}$ de eenheidsmatrix I_4 is?