Meetkunde II Examen

22 Juni 2018

1 Mondeling

1. Gegeven twee verschillende bundels Σ_1 en Σ_2 in $\mathbb{R}P^2$ en een projectieve afbeelding $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$. Toon aan dat alle punten bekomen door een rechte uit Σ_1 te snijden met zijn beeld onder ϕ in Σ_2 op een vaste kegelsnede in $\mathbb{R}P^2$ liggen.

2. Noteer met M_β het oppervlak in $\mathbb{E}^3$ bekomen door een booglengtegeparametriseerde kromme $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3 : u \mapsto (\beta_1(u), 0, \beta_2(u))$ met $\beta_1 > 0$ te wentelen rond de x_3-as.

   (a) Druk de Gausskromming van M_β uit met behulp van de functie β_1 en haar afgeleiden.

   (b) Voor welke krommen β is M_β een plat oppervlak?

   (c) Toon aan dat als M_β constante Gausskromming $\frac{1}{a^2}$ heeft met $a > 0$, er een $b > 0$ bestaat zodat na eventuele translatie van de x_3-as en herparametrisatie van de booglengteparameter, de kromme β gegeven is door

   $$\beta(u) = (b\cos(\frac{u}{a}), 0, \int_0^{\frac{u}{a}} \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 t}dt.$$

   (d) Geef het maximale interval I rond 0 waarop we de bovenste kromme β kunnen definiëren. Maak een onderscheid tussen $a < b$, $a = b$ en $a > b$ en schets M_β in deze 3 gevallen.

2 Schriftelijk

1. Zij $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ en $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4\}$ twee verzamelingen van vier verschillende punten in $\mathbb{C}P^1$ met $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \rho$ en $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4) = \tilde{\rho}$. Toon aan dat er een projectieve transformatie $\phi : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ bestaat met $\phi\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$ als en slechts als

   $$\frac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{\rho^2(\rho - 1)^2} = \frac{(\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho} + 1)^3}{\tilde{\rho}^2(\tilde{\rho} - 1)^2}.$$

2. Beschouw in $\mathbb{E}^2$ de kromme $C \leftrightarrow x^4 - y^4 - 4y^2 + 4x^2y + 4y^3 = 0$.

   (a) Zoek alle meervoudige punten en de hoofdraaklijnen.

   (b) Bepaal alle asymptoten van C.

   (c) Schets de kromme C en geef aan welke extra informatie je gebruikt.

3. (a) Gegeven is een eigenlijke patch $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3 : (u, v) \mapsto x(u, v)$ zodat

   $$x_u \cdot x_u = 1, x_u \cdot x_v = 0 \text{ en } x_v \cdot x_v = \cos^2 u.$$

   Bereken de Gausskromming van $x(U)$.

   (b) Geef een expliciet voorbeeld van een patch die aan de voorwaarden uit a) voldoet.

References