Examen Wiskundige methodes in de natuurkunde II
10 juni 2013 voormiddag

Perturbatieve technieken

Vraag 1

Gegeven is een d-dimensionale Hermitische matrix met niet-ontaarde eigenwaarden

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_d \end{pmatrix}, \quad j \neq k \longrightarrow a_j \neq a_k,$$

een d-dimensionale Hermitische matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dd} \end{pmatrix}, \quad b_{ji} = \overline{b_{ij}}$$

en een differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Bereken tot op eerste orde in $\epsilon \in \mathbb{R}$ de eigenwaarden van $f(A + \epsilon B)$
2. Bereken de matrix $f(A + \epsilon B)$ tot op eerste orde in ϵ.

Vraag 2

Trillingen van kleine amplitude van een snaar worden beschreven door de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \; 0 < t.$$

Hierbij is c de voorplantingssnelheid van het geluid en worden er randvoorwaarden $u(0,t) = u(L,t) = 0$ opgelegd. De eigenfrequenties $f = \omega/2\pi$ van de snaar worden bepaald door de staande-golfoplossingen en dit komt neer op het oplossen van de volgende differentiaalvergelijking

$$-X''(x) = \omega^2 X(x), \quad 0 < x < L, \; X(0) = X(L) = 0. \qquad (*)$$

1. Zoek een benadering van de laagste eigenfrequentie van de snaar door het variatieprincipe voor eigenwaarden van een Hermitische matrix te gebruiken en je te beperken tot veeltermen van graad kleiner of gelijk aan twee die aan de randvoorwaarden voldoen.
2. Krijg je een boven- of een ondergrens voor de frequentie van de grondtoon?
3. Hoever wijkt jouw benadering af van de exakte oplossing?

Dynamische systemen

Vraag 1

Ingeven opdracht voor zover dat nog niet is gebeurd.

Vraag 2

Beschouw de dynamica op $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -2\cos x - \cos y \\
\dot{y} &= -2\cos y - \cos x
\end{aligned}$$

a) Toon aan in welke zin dat systeem reversibel is, maar niet-conservatief.
b) Teken het faseportret.

Vraag 3: Beschouw de tent-afbeelding

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x, \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\
&= 2 - 2x, \quad 1/2 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

Toon dat die afbeelding een periode-2 baan heeft. Is die stabiel of niet? Deze afbeelding is chaotisch. Geef eerst de wiskundige definitie en dan de numerieke waarde van de Lyapunov exponent en verwoord in een paar lijnen wat dat betekent, en hoe dat fysisch een tijdsschaal bepaalt.