

Examen Complexe analyse

Leuven, 21 juni 2016

- Er zijn vier schriftelijke vragen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Het boek en de notities die beschikbaar werden gesteld op Toledo mogen gebruikt worden.
- Uitgewerkte oefeningen en ander materiaal uit oefenzittingen mag niet gebruikt worden. (Dit wordt gecontroleerd.)

Vraag 1

7 pt (a)

Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 + 1} dx.$$

3 pt (b)

Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx.$$

Vraag 2

5 pt (a)

Laat zien dat in elk kwadrant van het complex vlak een oplossing van de vergelijking $z^4 + iz + 1 = 0$ is.

0.1 5 pt (b)

Zij U een gebied, $z_0 \in U$ en f een analytische functie op $U \setminus \{z_0\}$ die voldoet aan

$$|f(z)| \leq M|z - z_0|^{-p}$$

voor een zekere $M > 0$ en $p < 1$. Bewijs dat z_0 een ophefbare singulariteit van f is.

Vraag 3

Beschouw een gebied $U = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \Im z < \frac{3\pi}{4}, \Re z > 0\}$.

3 pt (a)

Schets U en vind het beeld $V = f_1(U)$ van U onder de afbeelding f_1 gegeven door $f_1(z) = e^z$.

4pt (b)

Bepaal een Möbiustransformatie f_2 die V conform afbeeldt naar een sector $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \theta\}$. Wat is θ ?

3pt (c)

Geef een conforme afbeelding van U naar de eenheidsschijf $\mathbb{D}$.

Vraag 4

Zij $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ een analytische functie die geen Möbiustransformatie is. Voor $n \in \mathbb{N}$ is

$$f_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f \circ f}_{n \text{ keer}}$$

de n -voudige samenstelling van f .

4 pt (a)

Neem aan dat $f(0) = 0$. Laat zien dat voor elke $r \in [0, 1)$ een positief getal $\lambda_r < 1$ bestaat zodanig dat $|f(z)| \leq \lambda_r |z|$ voor alle z met $|z| \leq r$.

3 pt (b)

Neem nogmaals aan dat $f(0) = 0$. Bewijs dat de rij functies $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar 0 convergeert, uniform op compacte delen van $\mathbb{D}$.

3 pt (c)

Neem aan dat $f(z_0) = z_0$ voor een zekere $z_0 \in D \setminus \{0\}$. Wat kunt u in dit geval concluderen over de convergentie van de rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Motiveer uw antwoord.