Examen Getaltheorie

Nore Verbelen

Vrijdag 30 augustus 2019

Vraag 1 (mondeling)

1a

Zij p een priemgetal. Gebruik stelling 5.14 om aan te tonen dat we elke $x \in \mathbb{Z}_p$ kunnen schrijven als

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-p)^i$$

met $a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$

1b

Stel $n = p^k$ met p een priemgetal en $k \in \mathbb{Z}_{>1}$. Bewijs met behulp van Hensels lemma van n een Fermat-Pseudopriem is t.o.v. $p-1$ elementen uit $\{0, 1, ..., p^k - 1\}$

Vraag 2 (schriftelijk)

Bepaal de $p \in \mathbb{Q}$ waarvoor $p = 2x^2 - 5y^2$ een oplossing heeft.

Vraag 3 (schriftelijk)

Leg aan de hand van de stelling van Dirichlet (stelling 7.23) uit dat

$$\sum_{ppriem, \left(\frac{p}{q}\right)=-1} \frac{1}{p}$$

divergeert. Geef daarna ook een bewijs.
Hint: Gebruik het Legendre symbool $\left(\frac{\cdot}{q}\right)$ als alternatief voor $\mathcal{X}$ in stelling 7.13.

Vraag 4 (schriftelijk)

Bestaan volgende getallen? Zo ja, geef een voorbeeld. Zo nee, leg uit.

4a

$n > 0$ zodat voor p een priemgetal $\left(\frac{11}{p}\right)$ enkel afhangt van p mod n.

4b

p een priemgetal zodat $\mathbb{Q}_p$ isomorf is met $\mathbb{R}$.

4c

$n > 0$ zodat $2^{2^n} - 1$ strikt minder dan n verschillende priemfactoren heeft.