

Examen Wiskunde II
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie en Chemie
dinsdag 18 augustus 2009, 8:30–13:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; zonder los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent (Eva Leenknecht, Leen Prenen of Christophe Smet).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -b & b \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bespreek de oplosbaarheid en geef de oplossing van het stelsel

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \end{pmatrix}$$

in functie van de parameter $b \in \mathbb{R}$.

(b) Voor welke $b \in \mathbb{R}$ is de matrix A inverteerbaar? Bereken voor deze waarden van b de matrix A^{-1} .

(c) Voor welke $b \in \mathbb{R}$ heeft de matrix A alleen reële eigenwaarden?

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Beschouw een populatiemodel met twee soorten X en Y . De populatiegrootte van X na k jaar wordt aangeduid met x_k en die van Y met y_k . We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$x_{k+1} = \frac{1}{4}(x_k + 2a y_k) \quad \text{en} \quad y_{k+1} = \frac{1}{8}(2y_k + a x_k)$$

waarin $a > 1$ een constante is.

- (a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de karakteristieke veelterm en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van a).
- (b) Voor welke waarden van a treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?
- (c) Voor welke a is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $x_0 = 300$ en $y_0 = 100$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 (a) Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \cos \omega t$$

met $\omega \geq 0$.

(b) Geef de speciale oplossing die voldoet aan $x(0) = 0$ en $x'(0) = 0$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}u' &= u^2 - v^2 \\v' &= u^2v - 8\end{aligned}$$

voor twee functies $u(t)$ en $v(t)$.

- (a) Bereken de reële evenwichtspunten.
- (b) Lineariseer rond de evenwichtspunten.
- (c) Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtspunten.

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{voor } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bereken de Maclaurin reeks van f .
- (b) Laat zien dat de Fourier-getransformeerde van f gelijk is aan

$$g(y) = -\frac{y \sin(\pi y)}{\pi(4 - y^2)}.$$

- (c) Gebruik het resultaat uit (b) om de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \sin(\pi y)}{4 - y^2} dy$$

te berekenen.

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 D is het gebied in \mathbb{R}^2 gegeven door

$$D = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

met $R > 1$. Het gebied D bevat een metalen plaat met een massadichtheid

$$\rho(x, y) = \frac{1}{r^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- (a) Beschrijf het gebied D in poolcoördinaten en maak een schets van D .
- (b) Bereken de totale massa van D als functie van $R > 1$.

Antwoord: