Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Fysica

donderdag 31 januari 2019, 8:30–11:30

Auditorium G.00.01 (60 studenten)

B.01.05 (2 studenten met faciliteiten, 8:30-12:30)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt

  Vraag 2: (a) 4 pt (b) 4 pt (c) 2 pt

  Vraag 3: (a) 4 pt (b) 2 pt (c) 2 pt (d) 2 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 30)			

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A \subset X$ en $B \subset Y$ geldt

$$A \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(A) \cap B).$$

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(f(A) \cap B) \subset A \cap f^{-1}(B)$$

niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \; f^{-1}(f(A) \cap B) \subset A \cap f^{-1}(B)$$

als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 2 Neem aan dat de functie $f : X \to X$ voldoet aan $f \circ f \circ f = I_X$ waarin I_X de eenheidsfunctie op X is.

(a) Bewijs dat f een bijectie is.

We definiëren een relatie R op X door

$$(x, y) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \quad \text{of} \quad y = f(x) \quad \text{of } x = f(y).$$

(b) Toon aan dat R een equivalentierelatie is.

(c) Hoeveel elementen kunnen er in een equivalentieklasse van de equivalentierelatie R zitten?

Naam:

Vraag 3 We noemen $B \subset \mathbb{R}$ een **open verzameling** als

$$\forall x \in B : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : \ |x - y| < \delta \implies y \in B.$$

(a) Schrijf de bewering dat B niet een open verzameling is uit in kwantoren zonder de negatie $\neg$ te gebruiken.

Neem aan dat $B \subset \mathbb{R}$ een open, niet-lege verzameling is.

(b) Laat zien dat er reële getallen $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ bestaan zo dat $]a, b[\subset B$.

(c) Bewijs dat B overaftelbaar is.

(d) Bewijs dat B equipotent is met $\mathbb{R}$.