Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor 1ste fase Fysica
vrijdag 30 januari 2015, 8:30–11:30

Auditorium M.00.07: 64 studenten

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen A_1 en A_2 van X geldt

$$A_1 \subset A_2 \;\Rightarrow\; f(A_1) \subset f(A_2).$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere implicatie

$$f(A_1) \subset f(A_2) \;\Rightarrow\; A_1 \subset A_2$$

niet altijd geldt.

(c) Bewijs dat

$$\forall A_1 \in P(X) : \forall A_2 \in P(X) : \; [f(A_1) \subset f(A_2) \;\Rightarrow\; A_1 \subset A_2]$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 2 Zij X en Y twee niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie. We definiëren een relatie R_f op X door

$$(x_1, x_2) \in R_f \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

(a) Bewijs dat R_f een equivalentierelatie is.

(b) Bewijs dat
$$\mathcal{P}_f = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$$
een partitie van X is.

(c) Neem aan dat $f : X \to Y$ en $g : X \to Y$ twee functies zijn. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.

(1) Er bestaat een functie $\sigma : Y \to Y$ met $\sigma \circ f = g$.

(2) $R_f \subset R_g$

Naam:

Vraag 3 Neem aan dat (a_n) een reële rij is die voldoet aan

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \qquad \text{voor } n \geq 0.$$

Definieer dan

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bereken de voortbrengende functie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

voor het geval dat $a_0 = 1$ en $a_1 = 1$.

(b) Gebruik dit om a_k te berekenen voor $k = 2015$.

(c) Neem nu aan dat $a_1 \geq a_0 > 0$.

Laat zien dat

$$b_{n+1} = 2 + \frac{3}{b_n}$$

en bewijs met volledige inductie dat $2 < b_n < 4$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$.

Hint: merk op dat $b_0 \geq 1$ en bewijs eerst dat $2 < b_1 \leq 5$.