Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde

vrijdag 29 augustus 2014, 14:00–18:00

Auditorium L.00.06 15 studenten

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 3 pt
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt
Vraag 3:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 2 pt	(b) 4 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 De Pellgetallen p_n worden gedefinieerd door de recursierelatie

$$p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1} \qquad \text{voor } n \geq 1$$

samen met $p_0 = 0$ en $p_1 = 1$.

(a) Bewijs met volledige inductie dat

$$p_{n+1}p_{n-1} - p_n^2 = (-1)^n$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Bereken de voortbrengende functie

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

van de Pellgetallen. Wat is de convergentiestraal van de reeks?

(c) Bepaal uit de voortbrengende functie een expliciete formule voor p_n.

Vraag 2 Voor twee deelverzamelingen A en B van een vaste verzameling X definiëren we

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen A, B en C van X geldt dat

$$A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

en geef een voorbeeld waaruit blijkt dat gelijkheid niet hoeft te gelden.

We definiëren een relatie R op $P(X)$ (dit is de machtsverzameling van X) door

$$R = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \Delta B \text{ is aftelbaar}\}$$

(b) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(c) Neem aan dat X overaftelbaar is en dat $x_0 \in X$. Is de equivalentieklasse $[\{x_0\}]_R$ van $\{x_0\} \in P(X)$ dan een eindige, aftelbaar oneindige, of overaftelbare verzameling? Licht uw antwoord toe.

Naam:

Vraag 3 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat
$$A \subset f^{-1}(f(A)) \tag{1}$$
geldt voor alle $A \in P(X)$.

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat gelijkheid in (1) niet hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat
$$\forall A \in P(X) : A = f^{-1}(f(A))$$
geldt als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Neem $x > 0$ vast en beschouw de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \frac{n^2}{(1 + xn)^2}$$

Bewijs met behulp van de definitie dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is voor elke $x > 0$.

Naam:

Vraag 5 Neem aan dat $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege naar onder begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is.

(a) Geef de definitie van het infimum $\inf(A)$ van A.

(b) Neem aan dat (x_n) een rij is met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geq \inf(A).$$

(c) Bewijs dat er een convergente rij (x_n) met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ bestaat met limiet gelijk aan $\inf(A)$.