

Examen Complexe Functies: 18 januari 2018

Vraag 1 [8pt] *Bij deze vraag kreeg je enkel punten op je uiteindelijke antwoord, niet op redenering.*

1. $|i^9|$
2. Juist of fout? $a \leq b$, $a, b \geq 0$ en $z \in \mathbb{C}$
 - $a\operatorname{Re}(z) \leq b\operatorname{Re}(z)$
 - $|az| \leq |bz|$
 - $|a+z| \leq |b+z|$
 - $\operatorname{Re}(a+z) \leq \operatorname{Re}(b+z)$
3. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $z^8 = \pi e^{3i}$ in het $\operatorname{Re}(z)$ -deel van $\mathbb{C}$ (halfvlak)?
4. Waar zijn volgende functies analytisch (geef domein of teken het duidelijk):
 $f_1(z) = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$, $f_2(z) = i\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$
5. Als $\oint f(z)dz \neq 0$ op een open schijf S , bestaat er dan een analytische functie waarvoor $\oint f(z)dz = 0$ op de rand van die schijf S ?
6. Bestaat er een gesloten contour waarvoor $\oint \frac{dz}{z^3} \neq 0$?
7. Bepaal welke singulariteit $f(z) = \frac{1}{z^2 - \sin(\sin z)}$ heeft in $z = 0$.
8. Bepaal welke singulariteit $f(z) = \frac{e^{1/z}}{e^z}$ heeft in $z = 0$.
9. Als $f(z)$ een geïsoleerde singulariteit heeft in $z = i$, wat voor singulariteit heeft $g(z) = \frac{f(z)}{1+z^2}$ dan in $z = i$?
10. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $e^z = 3i$?

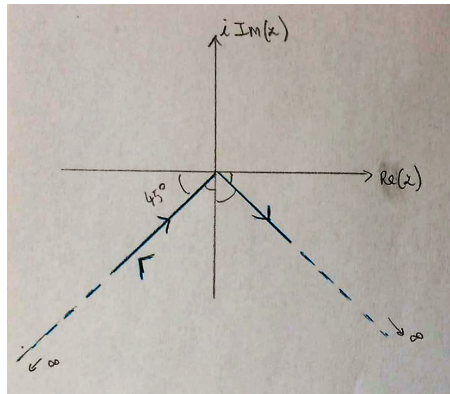
Bij alle andere vragen krijg je wel punten op redenering, maar de berekeningen zouden kort moeten zijn.

Vraag 2 [2pt] Beschrijf volgende functie met een polynoom tot op tweede orde.

$$f(z) = e^{\sin z} \quad (1)$$

Vraag 3 [2pt] Bereken de integraal

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} \quad (2)$$



Figuur 1

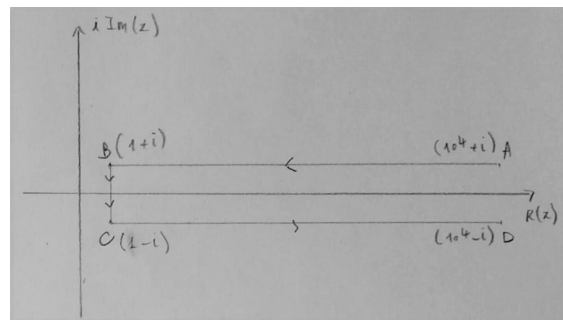
over het gegeven contour Γ (figuur 1).

Vraag 4 [2pt] Bestaat er een analytische functie $h(z)$ die voldoet aan volgende voorwaarde:

$$\operatorname{Re}(h(z)) = (\operatorname{Re}(z))^2 \quad (3)$$

Vraag 5 [3pt] Bepaal k tot op 1% nauwkeurig over het gegeven contour Γ (figuur 2, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$). *De bedoeling hier was dat je gewoon begint te berekenen en op een moment best benadert omdat exact bepalen moeilijk is, verder moet je niets doen met die 1%.*

$$k = \left| - \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3} \right| \quad (4)$$



Figuur 2

Vraag 6 [3pt] Bewijs eerste dat

$$\cos(z) = -\cos(z - \pi). \quad (5)$$

Bepaal vervolgens de integraal

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\cos(z)} \quad (6)$$

en gebruik hierbij (5), waarbij Γ de rechte $x = 0$ is, die doorlopen wordt van $y = -\infty$ tot $y = +\infty$.