Elektromagnetische golven

De vergelijkingen van Maxwell en de ontdekkingen van Hertz De vier vergelijkingen van Maxwell voor elektrische en magnetische velden geven, samen met de formule $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{b}$ voor de Lorentzkracht, een volledige beschrijving voor alle elektromagnetische verschijnselen:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Aan de hand van deze vergelijkingen voorspelde Maxwell het bestaan van elektromagnetische golven met als voortplantingssnelheid de lichtsnelheid c. Hertz slaagde er in om dergelijke golven te detecteren.

Vlakke elektromagnetische golven In een ruimte zonder lading en zonder stroom geldt er dat

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

We beschouwen nu een elektromagnetische golf die zich voortplant volgens de x-as, met het elektrisch veld volgens de y-as en het magnetisch veld volgens de z-as: we noemen dit een *lineair gepolarizeerde* golf. We veronderstellen dat élk punt in het yz-vlak een dergelijke golf uitstuurt en dat al deze golven in fase zijn. Dan hangen de veldsterkten B en E enkel af van x en t en niet van y en z. We noemen de lijn waarlangs een dergelijke golf zich verplaatst een *straal*: alle stralen zijn evenwijdig. De verzameling van al de golven noemen we een *vlakke golf.* Een golffront, of nog, een oppervlak dat punten die in fase zijn met elkaar verbindt, is in dit geval namelijk een vlak. Volgens de wet van Faraday hebben we dan dat

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Beschouw een rechthoekje met breedte dx en hoogte ℓ in het xy-vlak. Voor de boven- en onderkant van het rechthoekje zijn $\vec{E}$ en $d\vec{s}$ orthogonaal. De veldsterkte op de rechterzijde van het rechthoekje is dan

$$E(x+dx,t) \approx E(x,t) + \frac{\partial E}{\partial x}\,dx \quad \text{zodat} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \ell \cdot \big(E(x+dx,t) - E(x,t)\big) \approx \ell\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)dx.$$

Als we veronderstellen dat dx heel klein is in vergelijking met de golflengte, dan is de magnetische flux door het rechthoekje ongeveer $\Phi_B = B\ell\,dx$. Uit de wet van Faraday volgt dus dat

$$\ell\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)dx = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\ell\frac{\partial B}{\partial t}dx \quad \text{zodat} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

We beschouwen nu een rechthoekje in het xz-vlak met hoogte ℓ en breedte dx. We vinden dan dat

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \ell\big(B(x,t) - B(x+dx,t)\big) \approx -\ell\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)dx.$$

De elektrische flux door het rechthoekje is $\Phi_E = E\ell\,dx$, en de wet van Ampère-Maxwell geeft dan dat

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\ell\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)dx = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\ell\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)dx \quad \text{en dus} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}.$$

We vinden zo de vergelijkingen

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{en ook} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

Uit de algemene golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ volgt dat de snelheid van de golf gelijk is aan $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$. Dat is precies de snelheid van licht in vacuüm, dus we vermoeden dat licht een elektromagnetische golf is. De eenvoudigste oplossing voor deze differentiaalvergelijkingen wordt gegeven door

$$E = E_{\max}\cos(kx - \omega t), \quad B = B_{\max}\cos(kx - \omega t).$$

Het golfgetal is $k = 2\pi/\lambda$ en de "hoeksnelheid" is $\omega = 2\pi f$, dus $\omega/k = \lambda f = c$ is de snelheid van de golf. We vinden nu, als we veronderstellen dat we inderdaad met sinusoïdale golven te maken hebben, dat

$$-kE_{\max}\sin(kx - \omega t) = \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_{\max}\sin(kx - \omega t)$$

zodat $kE_{\max} = \omega B_{\max}$ of $E_{\max}/B_{\max} = E/B = c$. De verhouding tussen de grootte van het elektrisch veld en de grootte van het magnetisch veld is dus constant voor elektromagnetische golven (gelijk aan c). Verder geldt er dat elektromagnetische golven transversale golven zijn en aan het superpositiebeginsel voldoen.

Energie van een elektromagnetische golf We definiëren de *Poynting vector* $\vec{S}$ als volgt:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}.$$

De grootte van deze vector geeft ons de hoeveelheid energie die, per tijdseenheid, door een eenheidsoppervlak stroomt dat loodrecht op de voortplantingsrichting staat. Voor een vlakke golf krijgen we

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{cB^2}{\mu_0}.$$

Natuurlijk is S tijdsafhankelijk. De intensiteit van de golf is dan

$$I = S_{\text{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T S\,dt = \frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0 T}\int_0^T \cos^2(kx - \omega t)\,dt = \frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{cB_{\max}^2}{2\mu_0}.$$

Merk op dat voor de energiedichtheden van de elektrische en magnetische velden geldt dat

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = u_E.$$

De totale energiedichtheid van de golf is dan $u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0$. Nu is

$$u_{\text{av}} = \frac{B_{\text{av}}^2}{\mu_0} = \frac{B_{\max}^2}{2\mu_0} \quad \text{en dus} \quad I = cu_{\text{av}}.$$

De intensiteit van de golf is dus het product van de gemiddelde energiedichtheid en de lichtsnelheid!
Zo krijgen we bijvoorbeeld voor een puntbron van elektromagnetische straling, op afstand r van de bron,

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{av}}}{4\pi r^2} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c} \quad \text{en dus} \quad E_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}_{\text{av}}}{2\pi r^2}} \quad \text{en } B_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mathcal{P}_{\text{av}}}{2\pi c r^2}}.$$

Ook voor een stroomvoerende geleider kunnen we met een Poynting vector werken. Beschouw een geleider met weerstand R, lengte ℓ, straal a en elektrisch veld E. Dit veld creëert een stroom I die op zijn beurt een magnetisch veld opwekt. Volgens de wet van Ohm is $\mathcal{P} = I^2 R$. We vinden dat

$$E = \frac{\Delta V}{\ell} = \frac{IR}{\ell}, \; B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{en dus} \quad S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{IR^2}{2\pi a\ell} = \frac{I^2 R}{A_{\text{mantel}}} = \frac{\mathcal{P}}{A_{\text{mantel}}}.$$

Stralingsdruk van elektromagnetische golven Een elektromagnetische golf ”transporteert” energie en in zekere zin ook impuls: een elektromagnetische golf kan een geladen deeltje namelijk laten bewegen. Als deze impuls door een bepaald oppervlak geabsorbeerd wordt, dan wordt er dus een bepaalde druk uitgeoefend op dat oppervlak. Veronderstel dat de golf een energiehoeveelheid U naar het oppervlak transporteert in een tijdsinterval Δt. Maxwell toonde aan dat, als het oppervlak álle energie absorbeert, de grootte van de totale impuls die naar het oppervlak wordt getransporteerd gegeven wordt door $p = U/c$. Dan is

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{cA}\frac{dU}{dt} = \frac{S}{c}$$

de *stralingsdruk* op het perfect absorberend oppervlak. Als het oppervlak perfect reflecterend is, dan hebben we dat $p = 2U/c$ en dus $P = 2S/c$. (Een voorbeeld van een toepassing is “zeilen met zonlicht”.)

Productie van elektromagnetische golven Stationaire ladingen of elektrische stromen creëren geen elektromagnetische straling. De fundamentele oorzaak van dergelijke straling is de *versnelling* van een geladen deeltje: variërende elektrische stromen zullen dus wél elektromagnetische straling uitzenden. Deze straling kunnen we bijvoorbeeld produceren met behulp van een *dipoolantenne*, zie Serway.

Het spectrum van elektromagnetische golven Voor alle elektromagnetische golven geldt natuurlijk dat $c = f\lambda$. Aan de hand van de golflengte onderscheiden we de volgende soorten elektromagnetische golven: radiogolven, microgolven, infrarood licht, zichtbaar licht, ultraviolet licht, X-stralen en gammastralen.