Examen differentiaalvergelijkingen

Linde de Jong

14 januari 2019, 14u

1 Vraag 1

Er was een inhomogene derde orde differentiaalvergelijking met onbepaalde coëfficiënten. Er werd gesteld dat er op $[a, b]$ drie lineair onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijking y_1, y_2 en y_3 waren. Je moest de Wronskiaan geven, zeggen wat je wist over het teken van de Wronskiaan, en bewijzen dat een bepaalde uitdrukking een oplossing voor de inhomogene vergelijking was.

2 Vraag 2

Gegeven is een tweede orde differentiaalvergelijking voor y:

$$(x-1)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0,$$

waarvan een oplossing $y(x) = e^x$ gegeven is.

2.1 Deelvraag 1

Vind via ordereductie een tweede lineair onafhankelijke oplossing van de differentiaalvergelijking.

2.2 Deelvraag 2

Wat voor een punt is $x = 1$? (De bedoeling is dat je dit bewijst)

2.3 Deelvraag 3

Hoe komt het dat de oplossingen van de differentiaalvergelijking geen singulariteit hebben in $x = 1$?

3 Vraag 3

Gebruik makende van de stelling over Fouriertransformaties en het convolutieproduct, bereken de Fouriertransformatie van volgende functie:

$$I(x) = \int_0^{1/2} e^{-(x-t)^2} dt$$

4 Vraag 4

Gegeven zijn de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + v_x &= 0 \\ v_t + 2v_x + u_x &= 0. \end{aligned}$$

Hierbij stellen subscripts partiële afgeleiden voor. Voer de volgende stappen uit:

1. Leid de partiële differentiaalvergelijkingen af waar $F = u + v$ en $G = u - v$ aan voldoen.

2. Neem aan dat ze een golfachtige oplossing hebben: $F = f(x - \alpha t)$ en $G = g(x - \beta t)$.

3. Zoek α en β zodat aan de vergelijkingen voldaan is.

4. Gegeven de beginvoorwaarden $F(x, 0) = \sin(x)$, $G(x, 0) = \cos(x)$, vind een oplossing voor F en G.

5. Haal uit deze oplossingen voor F en G uitdrukkingen voor u en v.