

Examen Wiskundige methodes in de natuurkunde  
17 augustus 2009

Discrete symmetriën

✓ **Vraag 1** Mondeling te beantwoorden vraag, maar lever ook een schriftelijk antwoord in.

Zij  $\chi$  het karakter van een representatie  $R$  van een eindige groep  $\mathcal{G}$ .

Toon aan dat  $R$  irreducibel is dan en slechts dan als

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_a n_a |\chi_a|^2 = 1.$$

Hierbij werd dezelfde notatie gebruikt als in de cursus.

Stel dat  $R_1$  en  $R_2$  irreps zijn van  $\mathcal{G}_1$  en  $\mathcal{G}_2$ .

Gebruik de vorige eigenschap om aan te tonen dat

$$(g_1, g_2) \mapsto R_1(g_1) \otimes R_2(g_2)$$

een irrep is van het direct product van  $\mathcal{G}_1$  met  $\mathcal{G}_2$ .

**Vraag 2**

Onderstel, omwille van technische eenvoud, dat de golf functies van een bepaald kwantumsysteem de eindigdimensionale ruimte  $\mathbb{C}^d$  opspannen. I.p.v. de evolutie van golf functies te bestuderen, kunnen we ook naar de evolutie van observabelen, m.a.w. van de  $d \times d$  matrices kijken. Symmetrie op niveau van golf functies wordt beschreven aan de hand van een unitaire representatie  $U$  van een groep  $\mathcal{G}$  op  $\mathbb{C}^d$ . Symmetrie op niveau van de observabelen wordt beschreven door de volgende afbeelding  $R$  van  $\mathcal{G}$  op de lineaire transformaties van de observabelen

$$R_g(A) := U_g A (U_g)^*, \quad g \in \mathcal{G}, \quad A \in \mathcal{M}_d.$$

✓ • Toon aan dat  $R$  een representatie is van  $\mathcal{G}$  op  $\mathcal{M}_d$ .

✓ • Toon aan dat

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr } A^* B, \quad A, B \in \mathcal{M}_d$$

een scalair product is op  $\mathcal{M}_d$ .

lineariteit  
positiviteit

✓ • Toon aan dat  $R$  een unitaire representatie is voor het scalair product uit het tweede puntje.

✓ • Bereken het karakter van  $R$  in termen van het karakter van  $U$ .